

105 年公務人員高等考試三級考試試題

類科：經建行政、工業行政、農業行政、交通技術

科目：統計學

一、將一批 12 部裝之電視中有 3 部有瑕疵，今隨機抽出 3 部檢驗，若令隨機變數 X 為檢驗之良品數，並且當「3 部均為良品時，整批接受；否則退貨」。

(一)若採抽驗後不放回方式。試寫出 X 之機率分配式、平均數及變異數；並求整批電視機被接受之機率為何?(8 分)

(二)若採抽驗後放回方式，試寫出 X 之機率分配式、平均數及變異數；並求整批電視機被接受之機率為何?(8 分)

(三)若採抽驗後不放回方式，試求在第 3 次檢驗終始驗出第 1 部有瑕疵電視機之機率為何?(4 分)

【擬答】

(一) r.v. X ：良品數 $\Rightarrow X \sim HG(N=12, k=9, n=3)$

$$(1) f(x) = \frac{C_x^k C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N} = \frac{C_x^9 C_{3-x}^3}{C_{12}^{12}}, x = 0, 1, 2, 3$$

$$(2) E(x) = \frac{n}{N} k = \frac{3}{12} \times 9 = \frac{9}{4}$$

$$(3) Var(x) = \frac{n}{N} k \left(1 - \frac{k}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{3}{12} \times 9 \left(1 - \frac{9}{12}\right) \left(\frac{12-3}{12-1}\right) = \frac{81}{176}$$

$$(4) p(X=3) = \frac{C_3^9 C_0^3}{C_{12}^{12}} = \frac{21}{55}$$

(二) r.v. X ：良品數 $\rightarrow x \sim b(n=3, p=\frac{3}{4})$

$$(1) f(x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} = C_x^3 \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}, x = 0, 1, 2, 3$$

$$(2) E(x) = np = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$(3) Var(x) = npq = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

$$(4) p(x=3) = C_3^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

$$(三) p = \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{55}$$



二、自母數為 λ 之卜瓦松分配(Poisson Distribution)抽出一大小為 n 的隨機樣本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 以估計此一未知母數 λ 。

(一)試據動差法(Method of Moments)求 λ 之估計量。(6 分)

(二)試據最概法(Method of Maximum Likelihood)求 λ 之最概估計量(Method of Maximum Likelihood) $\hat{\lambda}_{MLE}$ 。(6 分)

(三)驗證 $\hat{\lambda}_{MLE}$ 是否符合優良點估計量之一致性(Consistency)及充分性(Sufficiency) (8 分)

【擬答】

$$(一)(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{iid}{\sim} Poi(\lambda)$$

$$\text{樣本一階原動差 } m_1 = \bar{x}$$

$$\text{母體一階原動差 } \mu_1 = E(x) = \lambda$$

$$\Rightarrow m_1 = \mu_1 \Rightarrow \hat{\lambda}_{MME} = \bar{X}$$

$$(二)L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$\Rightarrow \ln L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \ln(\prod_{i=1}^n x_i!)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{X}, \text{ 且 } \left. \frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\bar{x}} < 0$$

$$\therefore \hat{\lambda}_{MLE} = \bar{X}$$

$$(三)(1) E(\hat{\lambda}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda = \lambda$$

$$\text{Var}(\hat{\lambda}) = \text{Var}(\bar{x}) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\lambda}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n} = 0$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \bar{X} \text{ 符合一致性}$$

$$(2) f(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\lambda} e^{\sum_{i=1}^n x_i (\ln \lambda)} = h(x) k(\lambda) e^{\sum_{i=1}^n x_i (\ln \lambda)} \text{ 為一維指數族}$$

所以 $\sum_{i=1}^n X_i$ 為 λ 的充分統計量 $\Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ 也必為 λ 的充分統計量

即 $\hat{\lambda}_{MLE} = \bar{X}$ 符合充分性

註：此題也可利用 Fisher-Neyman 分解定理



志光·學儒·保成 全國第1輔考 強化考生答題能力

高分作文班

提供實際寫作及文章觀摩，加強破題技巧，組織最佳架構。



題庫班

授予答題公式，讓您以最快速度解出正確答案。

奪榜特訓班

近年口碑成效最好之強效課程，採集中管理、密集訓練的輔考方式，考前70天助您提升破百分！

申論搶分班

針對法科、學科之區別深入探討，並做實戰演練，挑選範例給予指導。

擬真考試班

模擬考場氛圍，熟練答題時間及技巧，掌握實力提升信心。

張詠涵【104高考人事行政.103地特三等人事行政台北市】連過2榜

我有參加題庫班，題庫班老師很清楚知道學生哪裡觀念容易混淆或不清楚，都會幫我們正確釐清觀念；作文班的模式是實戰演練，會真正在課堂上計時練習，老師也會批閱給予意見，因此有助於增加作文的應考能力。

王

三、設隨機變數 X 表一商品上升之價格(元)， Y 表該商品銷售量降低之百分比(%)其聯合機率分配如下表：

$x \backslash y$	10	20	30
5	0.1	0.2	0.1
10	0.1	0.1	0.1
15	0.1	0.1	0.1

(一)求 X 之邊際機率分配。(4 分)

(二)求 μ_x 及 σ_x^2 (8 分)

(三)若已知 $\mu_x = 20$ ， $\sigma_y^2 = 60$ 求相關係數 ρ 。(5 分)

(四)求 $f(x=5|y=20)$ 。(3 分)

【擬答】

(一)

x	5	10	15
$f(x)$	0.4	0.3	0.3

$$(二) \mu_x = E(x) = \sum x f(x) = 5 \times 0.4 + 10 \times 0.3 + 15 \times 0.3 = 9.5$$

$$E(x^2) = \sum x^2 f(x) = 5^2 \times 0.4 + 10^2 \times 0.3 + 15^2 \times 0.3 = 107.5$$

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 107.5 - 9.5^2 = 17.25$$

$$(三) E(XY) = \sum xy f(x, y) = 5 \times 10 \times 0.1 + \cdots + 15 \times 30 \times 0.1 = 190$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 190 - 9.5 \times 20 = 0 \Rightarrow \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$$

$$(四) f(x=5|Y=20) = \frac{f(x=5, Y=20)}{f(Y=20)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

四、兩變數 x 及 y 之 5 個觀察值如下：

x	1	2	3	4	5
y	3	7	5	11	14

$$\text{今已求得：} \bar{x} = 3, \bar{y} = 8, \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 26, \sum (x - \bar{x})^2 = 10, \sum (y - \bar{y})^2 = 80,$$

$$\sum (y - \bar{y})^2 = 12.40$$

(一)適用最小平方法配合迴歸直線 $\hat{y} = a + bx$ 。(5 分)

(二)試求相關係數。(5 分)

(三)驗證估計標準誤(Standard error of the estimate) $S_e = 2.033$ 。(5 分)

(四)試求母體迴歸係數 β 之 95%信賴區間。(5 分)

【擬答】

$$(-) b = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{26}{10} = 2.6$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 8 - 2.6 \times 3 = 0.2 \Rightarrow \hat{Y} = 0.2 + 2.6X$$

$$(-) r = \frac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_X} \sqrt{SS_Y}} = \frac{26}{\sqrt{10} \sqrt{80}} = 0.9192$$

$$(\equiv) SSE = SST - SSR = SS_Y - b^2 SS_X$$

$$\Rightarrow S_e = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}} = \sqrt{\frac{80 - 2.6^2 \times 10}{5-2}} = 2.033$$

(四) β 信賴度 95%信賴區間為

$$(b - t_{0.025(3)} \sqrt{\frac{MSE}{SS_X}}, b + t_{0.025(3)} \sqrt{\frac{MSE}{SS_X}})$$

$$\Rightarrow (2.6 - 3.182 \sqrt{\frac{4.133}{10}}, 2.6 + 3.182 \sqrt{\frac{4.133}{10}})$$

$$\Rightarrow (0.5543, 4.6457)$$



志光·學儒·保成全國第1輔考

豐富考生學習資源



黃媛微【104高普考人事行政】**雙料金榜**

讀書會對我幫助很大，一起討論功課，抒發讀書受挫的心情，該科較強的人也無私的提供幫助，更重要的是互相激勵與扶持，國考是場馬拉松，有志同道合的夥伴一起更能激發上榜的意志！

五、設謀電子廠兩生產線之產品重量服從常態分配，今分別自該兩生產線隨機各抽取大小為 5 之樣本，得其產品重量(單位:公克)如下所示:

生產線 A	42	34	40	46	38
生產線 B	46	40	44	44	36

(一)是驗證生產線 B 之 $\bar{X}_B = 42$ ， $S_B^2 = \frac{\sum (x_2 - \bar{X}_2)^2}{n_B - 1} = 16$ 。(6 分)

(二)今若另求得生產線 A 之 $x_A = 40$ ， $S_A^2 = 20 \sum_{i=1}^n X_i Y_i$ 。試以 $\alpha = 0.10$ 之顯著水準，檢定

$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ 是否成立?(6 分)

(三)以 $\alpha = 0.10$ 之顯著水準，檢定兩生產線所有產品之平均重量是否差異?(8 分)

【擬答】

$$(一) \bar{X}_B = \frac{46 + 40 + 44 + 44 + 36}{5} = 42$$

$$S_B^2 = \frac{1}{5-1} [(46-42)^2 + \dots + (36-42)^2] = 16$$

$$(二) \begin{cases} H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.10 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{F | F > 6.39 \text{ 或 } F < 0.16\}$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{20}{16} = 1.25 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

$$\text{即 } H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \text{ 成立}$$

$$(三) \text{由(二)得 } \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = S_P^2 = \frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_B-1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(5-1) \times 20 + (5-1) \times 16}{5+5-2} = 18$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_B \\ H_1: \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

$$\alpha = 0.10 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{t | t > t_{0.05(8)} \text{ 或 } t < -t_{0.05(8)}\} = \{t | t > 1.860 \text{ 或 } t < -1.860\}$$

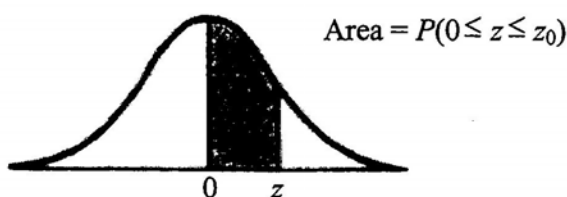
檢定統計量

$$t = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_P^2}{n_A} + \frac{S_P^2}{n_B}}} = \frac{(40 - 42) - 0}{\sqrt{\frac{18}{5} + \frac{18}{5}}} = -0.75 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示兩生產線所有產品平均重量有顯著差異

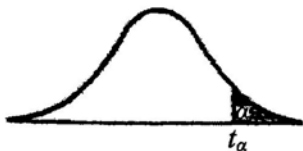
參考數值表摘錄

標準常態分配數值表



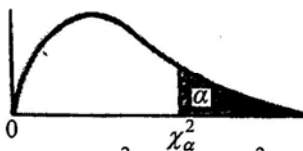
z_0	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974

t 分配數值表



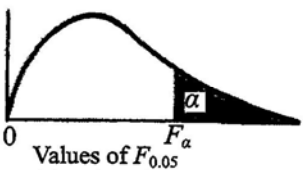
Degrees of Freedom	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250

χ^2 分配數值表



d.f.	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.9}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$	d.f.
1	.0000393	.000157	.000982	.00393	3.841	5.024	6.635	7.879		1
2	.0100	.0201	.0506	.103	5.991	7.378	9.210	10.597		2
3	.0717	.115	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838		3
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860		4
5	.412	.554	.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750		5

F 分配數值表



		Degrees of freedom for numerator																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞		
Degrees of freedom for denominator	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254		
	2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5		
	3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53		
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63		
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37		
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67		
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23		
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93		
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71		
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54		
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40		
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30		
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21		