

102 年公務人員特種考試關務人員考試試題

等 別：三等關務人員考試

類(科)別：關務統計

科 目：統計學

一、某代理商旗下所代理的某品牌手機，其進價成本每台為\$5,000 元，市售價格為\$10,000 元，假設該品牌手機的壽命服從平均數為 2(年)的指數分配，而該品牌手機代理商的保固政策如下：

- 如果該品牌手機在客戶購買後第 1 年內(含)故障，則無條件更新手機給客戶。(更新以 1 次為限，更新成本由該品牌手機代理商自行吸收，出貨廠商不負責，即代理商更新成本為進貨成本價\$5,000 元)
- 如果該品牌手機在客戶購買後第 1 年至第 2 年間(含)故障，則以市售價格的 1/4 價賠償客戶。

試問，今售出 100 台該品牌手機，則該品牌手機代理商的預期利得(金額)為何？

(註：計算過程中，常數 e(自然對數函數的底數)請取 2.718，機率值請四捨五入取至小數第 4 位運算之。)

【擬答】：

$$\begin{aligned} X &\sim \exp(\lambda = 2) \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 2e^{-2x}, \quad x > 0 \\ \Rightarrow p(x \leq 1) &= \int_0^1 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_0^1 = 1 - e^{-2} = 0.8646 \\ p(1 < x \leq 2) &= \int_1^2 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_1^2 = e^{-2} - e^{-4} = 0.1170 \\ p(x > 2) &= 1 - 0.8646 - 0.1170 = 0.0184 \end{aligned}$$

	1 年內故障	1 年至第 2 年間故障	2 年以上才故障
利得 X	0	2500	5000
機率 $f(x)$	0.8646	0.1170	0.0184
每台手機預期利得	$E(x) = \sum xf(x)$ $= 0 \times 0.8646 + 2500 \times 0.1170 + 5000 \times 0.0184$ $= 384.5$		

$\Rightarrow 100$ 台手機預期利得 = $384.5 \times 100 = 38450$ 元

二、簡單線性無截距項(non-intercept)迴歸分析模式(*)如下式：

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

(一)求 β 的最小平方估計式 $\hat{\beta}$ 。

(二)假設誤差項 ε_i 是獨立同態 *i.i.d.* 且服從常態分配，即 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ，則試問簡單線性無截距項迴歸分析模式 (*) 中， β 最小平方估計式 $\hat{\beta}$ 的抽樣分配為何？

(三)試問最小平方估計式 $\hat{\beta}$ 是否為 β 的不偏估計式？請寫出正確理由否則不予計分。

【擬答】：

(一) $\hat{Y}_i = \hat{\beta} X_i$ ，利用最小平方法

$$\begin{aligned} SSE &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta} X_i)^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}} &= 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta} X_i)(-X_i) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta} X_i)(X_i) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= 0 \\ \Rightarrow \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \end{aligned}$$

公職王歷屆試題 (102 關務人員特考)

(二) Y_1, Y_2, \dots, Y_n 為常態分配：

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \text{ 之抽樣分配也為常態分配}$$

$$E(\hat{\beta}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i E(Y_i)}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n X_i (\beta X_i)}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \frac{\beta \sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \beta$$

$$Var(\hat{\beta}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 Var(Y_i)}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right)$$

(三) 若 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 則稱 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式

又由(二) $E(\hat{\beta}) = \beta$, 所以 $\hat{\beta}$ 為 β 的不偏估計式

三、假設某位立委針對新的年金改革方案進行意見調查，得到以下的資料：

職業意見	藍領階級	白領階級	其他職業類型
贊成	66	23	79
反對	18	50	42
沒意見	36	16	38

試問在顯著水準 0.05 下，有足夠的證據顯示不同職業類別的人對該年金改革方案的意見有關聯嗎？

(註：請寫出完整假設檢定步驟，在計算檢定統計量時，請先清楚標示數學列式和理論次數值，其中理論次數值請四捨五入取至小數第 2 位，中間所有運算過程亦以小數 2 位為之。請注意，若未正確列式將無法計分。)

【擬答】：

此題利用卡方齊一性檢定

職業意見	藍領階級	白領階級	其他職業類型	合計
贊成	66 (54.78)	23 (40.63)	79 (72.59)	168
反對	18 (35.87)	50 (26.60)	42 (47.53)	110
沒意見	36 (29.35)	16 (21.77)	38 (38.89)	90
合計	120	89	159	368

公職王歷屆試題 (102 關務人員特考)

其中 () 值為理論次數值 = $\frac{\text{列和} \times \text{行和}}{\text{總和}}$

H_0 :不同職業類別的人對該年金改革方案的意見無關
 H_1 :不同職業類別的人對該年金改革方案的意見有關

$\alpha=0.05$

$$\text{拒絕域 } c = \left\{ x^2 \mid x^2 > x^2_{0.05}(4) = 9.4877 \right\}$$

檢定統計量

$$x^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(66 - 54.78)^2}{54.78} + \dots + \frac{(38 - 38.89)^2}{38.89} \\ = 43.70 \in c \Rightarrow Re Ho$$

結論：有證據顯示不同職業類別的人對該年金改革方案的意見有關

四、根據某研究蒐集到的一組 500 筆資料計算後，得其樣本平均數為 35、樣本標準差為 4，另外其所繪製的直方圖顯示該組資料分配是極度右偏，試問：

(一)根據以上資訊，應該有多少筆資料會落在 29.4 和 40.6 中間。

(二)根據以上資訊，應該有多少筆資料會落在 27 和 41 中間。

(三)您答案的理論依據是甚麼？

【擬答】：

(一)因資料非常態分配 \Rightarrow 利用 chebychev's Inequality

$$N = 500, \mu = 35, \sigma = 4$$

$$\Rightarrow p(|x - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \\ \Rightarrow p(29.4 \leq x \leq 40.6) = p(|x - 35| \leq 5.6) \\ = p(|x - 35| \leq 1.4 \times 4) \geq 1 - \frac{1}{1.4^2} = 0.4898 \\ \Rightarrow 500 \times 0.4898 = 244.9$$

所以資料落在 29.4 和 40.6 中間至少 245 筆

(二)

$$p(27 \leq x \leq 41) \geq p(29 \leq x \leq 41) = p(|x - 35| \leq 6) \\ = p(|x - 35| \leq 1.5 \times 4) \geq 1 - \frac{1}{1.5^2} = 0.5556 \\ \Rightarrow 500 \times 0.5556 = 277.8$$

所以資料落在 27 和 41 中間至少 278 筆

(三)因為資料非常態分配，則利用 chebychev's Inequality

求機率下界

五、假設有一強颱可能在下週一時來襲，市政府機關得提前決定是否要停止上班上課，若定義假設如下：

H_0 ：強颱會來襲 vs. H_1 ：強颱不會來襲

若市政府機關判定強颱可能不會來，因此決定如期上班上課，但強颱一如預期在下週一期間來襲，則市政府機關的決策是犯了型 I 或型 II 那個誤差？請同時定義該誤差。

【擬答】：

H_0 :強颱會來襲
 H_1 :強颱不會來襲

市政府機關判定強颱可能不會來，因此決定如期上班，但強颱在下週一期間來襲，此決策犯了型 I 錯誤。

即「 H_0 為真，且拒絕 H_0 」

六、(一)何謂平穩型的時間數列？

(二)根據下列所蒐集某特定地區觀光團數的時間數列資料，請以退化平滑因子(smoothing constant) $\omega = 0.94$ 來建構指數平滑法(exponentially smoothed time series)時間數列。
(計算過程請列式，中間所有運算過程以小數 2 位計算之。)

期數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
觀光團數	12	35	28	25	31	20	15	17	38	40

【擬答】：

- (一)平穩型的時間數列是指一個時間數列的統計，特性不會隨著時間的變化而有所改變。
(二)指數平滑法時間數列預測值

$$F_{t+1} = \omega Y_t + (1 - \omega)F_t$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_t	12	35	28	25	31	20	15	17	38	40
F_t		12	33.62	28.34	25.20	30.65	20.64	15.34	16.90	36.73

$$\text{令 } F_1 = Y_1 = 12$$

$$F_2 = 12 \times 0.94 + 12 \times 0.06 = 12$$

$$F_3 = 35 \times 0.94 + 12 \times 0.06 = 33.62$$

$$F_4 = 28 \times 0.94 + 33.62 \times 0.06 = 28.34$$

$$F_5 = 25 \times 0.94 + 28.34 \times 0.06 = 25.20$$

$$F_6 = 31 \times 0.94 + 25.20 \times 0.06 = 30.65$$

$$F_7 = 20 \times 0.94 + 30.65 \times 0.06 = 20.64$$

$$F_8 = 15 \times 0.94 + 20.64 \times 0.06 = 15.34$$

$$F_9 = 17 \times 0.94 + 15.34 \times 0.06 = 16.90$$

$$F_{10} = 38 \times 0.94 + 16.90 \times 0.06 = 36.73$$

七、某大專院校系所針對應屆畢業生從事三個不同職業類別工作的起薪(K)進行調查，假設得到下列的資料：

職業別	補教業	製造業	服務業
樣本數	$n_1 = 5$	$n_2 = 4$	$n_3 = 6$
樣本平均數	$\bar{x}_1 = 27.6$	$\bar{x}_2 = 39.25$	$\bar{x}_3 = 34.67$
樣本變異數	$s_1^2 = 22.3$	$s_2^2 = 35.58$	$s_3^2 = 177.07$

(一)請建構進行三種職業別工作平均起薪是否有差異檢定所對應的變異數分析表(ANOVA table)。

(二)以顯著水準 0.05 進行三種職業別工作平均起薪是否有差異之檢定？

(註：請寫出完整假設檢定步驟，中間所有運算過程請四捨五入取至小數第 2 位計算之。)

【擬答】：

(一)此為單因子變異數分析

$$SST = SSTR + SSE$$

$$\bar{x}_{\text{all}} = \frac{27.6 \times 5 + 39.25 \times 4 + 34.67 \times 6}{5 + 4 + 6} = 33.53$$

公職王歷屆試題 (102 關務人員特考)

$$SSTR = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_{\cdot \cdot})^2 = 5(27.6 - 33.53)^2 + 4(39.25 - 33.53)^2 + 6(34.67 - 33.53)^2 = 314.50$$

$$SSE = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2 = (5-1) \times 22.3 + (4-1) \times 35.58 + (6-1) \times 177.07 = 1081.29$$

$$SST = SSTR + SSE = 1395.79$$

ANOVA 表

來源	SS	df	MS	F 值
組間	314.50	2	157.25	
組內	1081.29	12	90.11	
總變異	1395.79	14		F=1.75

(二)

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1 : \mu_i \text{ 不全相同}, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

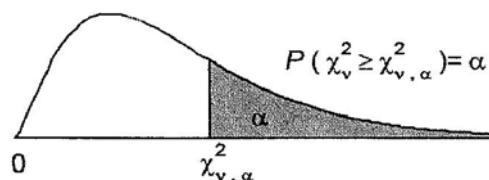
$\alpha = 0.05$

$$\text{拒絕域 } c = \left\{ F \mid F > F_{0.05}(2, 12) = 3.89 \right\}$$

$$F = 1.75 \notin c \Rightarrow \text{not Re Ho}$$

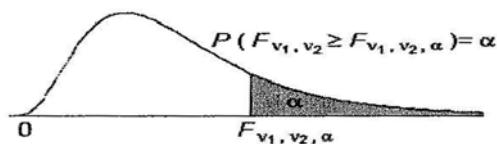
結論：沒有證據顯示三種職業別工作平均起薪有差異

表 χ^2 分配右尾切點(cut-off points)



v	α									
	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	7.8794	6.6349	5.0239	3.8415	2.7055	0.0158	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000
2	10.5966	9.2103	7.3778	5.9915	4.6052	0.2107	0.1026	0.0506	0.0201	0.0100
3	12.8382	11.3449	9.3484	7.8147	6.2514	0.5844	0.3518	0.2158	0.1148	0.0717
4	14.8603	13.2767	11.1433	9.4877	7.7794	1.0636	0.7107	0.4844	0.2971	0.2070
5	16.7496	15.0863	12.8325	11.0705	9.2364	1.6103	1.1455	0.8312	0.5543	0.4117
6	18.5476	16.8119	14.4494	12.5916	10.6446	2.2041	1.6354	1.2373	0.8721	0.6757
7	20.2777	18.4753	16.0128	14.0671	12.0170	2.8331	2.1673	1.6899	1.2390	0.9893
8	21.9550	20.0902	17.5345	15.5073	13.3616	3.4895	2.7326	2.1797	1.6465	1.3444
9	23.5894	21.6660	19.0228	16.9190	14.6837	4.1682	3.3251	2.7004	2.0879	1.7349
10	25.1882	23.2093	20.4832	18.3070	15.9872	4.8652	3.9403	3.2470	2.5582	2.1559

表 F 分配右尾切點(cut-off points)



v_2	α	v_1									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.01	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85
	0.05	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88
	0.10	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
2	0.01	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
	0.05	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
	0.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
3	0.01	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23
	0.05	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
	0.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
4	0.01	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
	0.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
	0.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
5	0.01	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
	0.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
	0.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
6	0.01	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
	0.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
	0.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
7	0.01	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
	0.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
	0.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70
8	0.01	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
	0.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
	0.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
9	0.01	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
	0.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
	0.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
10	0.01	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
	0.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
	0.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
11	0.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
	0.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
	0.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
12	0.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
	0.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
	0.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
13	0.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
	0.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
	0.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
14	0.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
	0.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
	0.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
15	0.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
	0.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
	0.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06