

# 105 年交通事業鐵路人員考試試題

等別：高員三級鐵路人員考試

類科別：電子工程

科目：電磁學

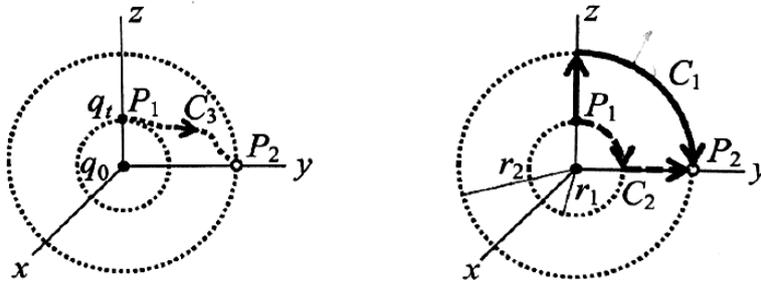
一、自由空間中有一個電荷  $q_0$  位在座標系統的原點，且在其周遭建立了靜電場，有另外一個點電荷  $q_t$  位在點  $P_1$  處(在  $Z$  軸上)，當  $q_t$  從點  $P_1$  移動到點  $P_2$ (在  $y$  軸上)，請考慮沿著下列的不同

路徑，分別計算電荷  $q_0$  的電力對  $q_t$  所作的功  $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ ，其中庫倫力  $\vec{F} = \frac{q_0 q_t}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R}}{R^2}$ ，而圖中的

內圈半徑為  $r_1$ ，外圈半徑為  $r_2$ ：

- (一)沿著路徑  $C_1$ ( $P_1$  到  $P_2$  的實線)。(6 分)
- (二)沿著路徑  $C_2$ ( $P_1$  到  $P_2$  的虛線)。(6 分)
- (三)沿著任意路徑  $C_3$ ( $P_1$  到  $P_2$  的點線)。(7 分)
- (四)從(一)~(三)的結果，你得到什麼結論？(6 分)

[提示]：首先，寫出球座標下的  $d\vec{l}$ ，……。



## 【擬答】

球形座標之  $d\vec{l} = dR\vec{a}_R + R d\theta\vec{a}_\theta + R \sin\theta d\phi\vec{a}_\phi$

圖中各種路徑  $\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d\phi = 0$

$$\vec{F} = \hat{a}_R \frac{q_0 q_t}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

(一)沿著路徑  $C_1$ ：弧狀部分積分為 0，僅積分直線部分，則

$$W = \int_{r_2}^{r_1} \frac{q_0 q_t}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{q_0 q_t}{4\pi\epsilon_0} \times \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

(二)沿著路徑  $C_2$ ：弧狀部分積分為 0，則

$$W = \int_{r_2}^{r_1} \frac{q_0 q_t}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{q_0 q_t}{4\pi\epsilon_0} \times \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

(三)沿著路徑  $C_3$ ：

$$W = \int_{P_2}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 [V(P_2) - V(P_1)]$$

所以

$$W = \frac{q_0 q_t}{4\pi\epsilon_0} \times \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

(四)靜電力為保守力，因此與路徑無關，僅與起點和終點有關

# 志光 學 儒

專業為導向 考取為目標



7月

針對初等考試衝刺

1月

再戰鐵路考試上榜

6月

只繳一次費用 享雙項考試課程輔導

01

扎實  
正規課程

02

重點  
加強講座

03

精準  
題庫解析

04

精華  
重點整理

二、針對下列的電學系統，一個直流電源  $V_{12}$  連接到一塊導電性均勻的材料，兩端塗以金屬極板(1和2)，且材料的橫截面積為  $A$ 、長度為  $L$ ，又其導電率為  $\sigma$ ；已知自由電子會因電場的存在而受力移動，且假設材料內的電場  $\vec{E}$  是均勻的：

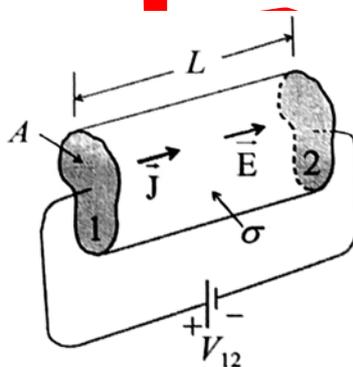
(一)請由  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  開始，推導出電路學的歐姆定律  $V_{12} = IR$ ，其中  $\vec{J}$  是電流密度。(12分)

(二)計算其消耗的電功率，請問這些消耗的能量或轉傳給「誰」，並說明電能量被轉變成何種形式的能量？(6分)

(三)請解釋  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  的意義，以及其背後的機制，並與下列的力學系統例子進行比較。(7分)

力學系統：在空氣中的雨滴向下墜落的過程中，雨滴會和空氣分子碰撞，將能量轉傳給空氣分子，使得雨滴最後以等速度(稱為終端速度)落下。

[提示]：  $V_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 。



【擬答】

(一)  $\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ，則

$$I = \sigma \times \frac{V_{12}}{d} \times S$$

又

$$R = \frac{d}{\sigma S}$$

$$\text{所以 } V_{12} = I \times R$$

(二) 功率消耗為

$$P = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \iint_{SS} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -VI = -I^2 R$$

能量從電場中會以熱振動的方式傳遞至碰撞的原子，上述公式為焦耳定律，即於一已知體積  $V$  中，消耗於電阻  $R$  上，熱的總功率。

(三) 如圖所示：

在長度為  $L$ ，截面積為  $S$  的導體面上，外加一電位差  $V_{12}$ ，此電位差會在導體內產生電場  $\vec{E}$ ，此一電場會推動電荷，由電荷之移動而形成電流，因此  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ 。

在力學系統中，空氣中的雨滴受到重力影響而加速，如同於導體中的電子一般，受到外加電場而加速，因而產生漂移運動。

當雨滴加速時，速度漸增，因而產生的阻力亦愈大，所以雨滴往下墜落的加速度漸減，當空氣阻力與重力相等時，合力為 0，此時雨滴恆做等速度運動而落下，此時速度稱為終端速度，損失之能量轉移給空氣分子。

相對於力學系統，電荷在移動過程中會與其他電子產生碰撞，如同空氣阻力一般，最後產生固定的漂移速度，在移動中產生之電流，與外加電場之作用下，會消耗部分能量，由於並非保守場，消耗之能量一般是以熱的型態轉換。

三、已知靜磁場滿足安培迴路定律如下：

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (3a)$$

其中  $C$  是任意的封閉迴路(不論其形狀、大小與位置為何)， $I$  是迴路  $C$  所包圍的穩定電流。

(一) 請進一步利用斯托克斯定理(Stokes' Theorem)，以推導其對應的點形式安培定律如下：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3b)$$

其中  $\vec{J}$  是電流密度。(11 分)

(二) 接著，請證明在交流情況下，(3b) 式違背下列的連續方程式

$$\nabla \times \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

其中  $\rho$  是電荷密度；並據此，針對交流情況下，對(3b)式進行必要的修正。(14 分)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$[\text{提示}] : \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

【擬答】

(一) 根據史托克定理(Stoke's theorem)： $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$

則

$$\oint (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

(二) 學習安培定律時之定律為  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} = 0$

但根據連續方程式可知  $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

因此上述公式居然產生矛盾，故安培定律需做若干之修正：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \rho = \nabla \cdot \vec{D}$$

# 志光 學 儒

## 熱門類科推薦

郵局 考試	專業職(二) 內勤	1.國文及英文 2.企業管理大意 3.郵政三法大意 (含郵政法、郵政儲金匯兌法、簡易人壽保險法)
	專業職(二) 外勤	1.國文 2.企業管理大意 3.郵政法大意及交通安全常識
國營 事業	企管	1. 國文(論文寫作)、※英文(測驗題型) 2. ※專業A：企業概論+法學緒論 3. 專業B：管理學+經濟學

(備註:外勤今年不考英文了喔!)



四、如圖 4a 所示，對於一傳輸線中的電壓和電流，其定義一般用電場/磁場表示如下：

$$V(z,t) = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4a)$$

$$i(z,t) = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (4b)$$

且為了滿足傳輸線的電報者方程式，電壓  $v$  和電流  $i$  的解分別為

$$\begin{cases} v(z,t) = v^+ f(z-t/u_p) \\ i(z,t) = I^+ f(z-t/u_p) \end{cases} \quad \text{且 } \frac{V^+}{I^+} = Z_0 \text{ (特性阻抗)}$$

或

$$\begin{cases} v(z,t) = v^- f(z-t/u_p) \\ i(z,t) = I^- f(z-t/u_p) \end{cases} \quad \text{且 } \frac{V^-}{I^-} = -Z_0$$

(一)如圖 4b 所示， $z=0$  處為兩個不一樣的傳輸線的境界，設其特性抗阻  $Z_{01}$ 、 $Z_{02}$  給定，且入

射波  $V^+$  為已知，求反射波幅度  $V$  和透射波幅度  $V_2^+$  之值，以及其電壓反射係數  $\frac{V^-}{V^+}$ 。(8 分)

(二)比較：對於在介電材料中傳播的一平面波之反射，如圖 4c 所示，設  $z=0$  處為兩個半空間介電材料的交界，且其內稟阻抗(intrinsic impedance)  $\eta_{01}$ 、 $\eta_{02}$  給定，當入射波的幅度  $E^+$  為

已知，求反射幅度  $E^-$  和透射波幅度  $E_2^+$  之值，以及其電場反射係數  $\frac{E^-}{E^+}$ 。(8 分)

(三)比較(一)和(二)結果表示式的相似處，並陳述其背後的理由。(4 分)

(四)比較(一)和(二)結果表示式的不同處，並陳述其背後的理由。(5 分)

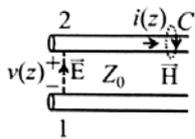


圖 4a

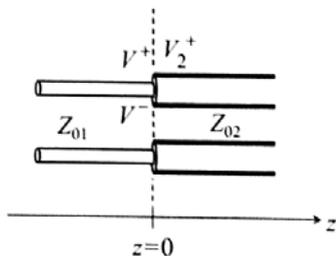


圖 4b

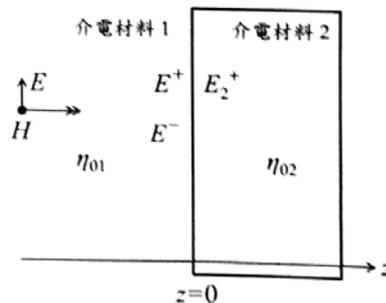


圖 4c

【擬答】

(一)兩條不同突波阻抗相串聯，則

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow V_2^+ = V^+ + V^- \text{-----(1)}$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_{01}} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_{01}} e^{\gamma z} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \frac{V_2^+}{Z_{02}} = \frac{V^+}{Z_{01}} - \frac{V^-}{Z_{01}} \text{-----(2)}$$

解聯立(1)-(2)式可得

$$V^- = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \times V^+$$

$$V_2^+ = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} \times V^+$$

則反射係數  $\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$

(二)垂直入射一介質平面之電磁波表示式如下：

入射波：  $\begin{cases} \vec{E}_i(z) = \hat{x}E_{i0} e^{-j\beta_1 z} \\ \vec{H}_i(z) = \hat{y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \end{cases}$  , 反射波：  $\begin{cases} \vec{E}_r(z) = \hat{x}E_{r0} e^{j\beta_1 z} \\ \vec{H}_r(z) = -\hat{y} \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z} \end{cases}$

透射波：  $\begin{cases} \vec{E}_t(z) = \hat{x}E_{t0} e^{-j\beta_2 z} \\ \vec{H}_t(z) = \hat{y} \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} \end{cases}$

應用邊界條件為：

$$\begin{cases} E_i(0) + E_r(0) = E_t(0) \\ H_i(0) + H_r(0) = H_t(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ \frac{1}{\eta_1} (E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{r0} = E^- = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} E^+ \\ E_{t0} = E_2^+ = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E^+ \end{cases}$$

反射係數  $\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -\frac{H_{r0}}{H_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$

透射係數  $\tau = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$

公職王

(三)推導過程中皆為利用邊界條件連續之條件，在正向入射之電場相似於傳輸線的電壓；磁場強度相似於傳輸線之電流，且本質阻抗相似於傳輸線的特性阻抗，因此解出之反射波與透射波相似。

- (四)
- 1.在介電材料中，若為無損耗性，則 $\sigma=0$ ，此時的本質阻抗將變成實數量，一般
$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} ; \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$
  - 2.在傳輸線中，反射係數與透射係數通常都會產生相位偏移，因此對於入射波與透射波均會產生相移效果，進而影響傳達功率。。



## 志光 學儒

感謝眾多學員的肯定

<h3>輔導用心</h3> <p>補習班給考生除了課程師資之外，就是心理上的支持，我想說，還好來到志光。</p> <p><b>鄭揚仁</b> 104鐵路佐級事務管理</p>	<h3>師資專業</h3> <p>特別感謝老師，幫考生建立了清楚完整的法學架構體系表，解題時快速抓到方向。</p> <p><b>王子豪</b> 104鐵路佐級事務管理</p>	<h3>教材精準</h3> <p>課本讀起來讓人很快進入狀況並打好基處，我是把課本細讀後，再針對重點部分加強記憶。</p> <p><b>蔡宛錚</b> 104鐵路佐級運輸營業</p>	<h3>資料豐富</h3> <p>志光擁有豐富資料庫及考古題解析，讓我能夠隨時補充運用。</p> <p><b>蔡孟玲</b> 104鐵路高員級運輸營業</p>
--	---	---	---

# 王