

104 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

甲、申論題部份：

一、求橢圓 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 在點 $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 上的切線方程式 $y = f(x)$ 。

【擬答】：

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \bigg|_{(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})} = -\frac{\frac{x}{2}}{2y} \bigg|_{(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})} = -\frac{1}{2}$$

∴ 切線方程式為

$$(y - \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2})$$

二、設 3 階方陣 $A = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix}$ ，求其行列式之 x 的導函數 $\frac{d}{dx}|A|$ 為何？

【擬答】：

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -x^6 - 4x^3 + 2x^2 + 5x + 2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}|A| = -6x^5 - 12x^2 + 4x + 5$$

三、某製造公司採用 3 種不同的方法 A、B 及 C 來設計和開發某個特定的產品。基於成本的考量，這 3 種方法不會同時被採用；而且，方法 A、B 和 C 分別用在 30%、20% 及 50% 的產品上。已知這 3 種方法所製造出來的產品其瑕疵率分別為 $P(D|A) = 0.01$, $P(D|B) = 0.03$, $P(D|C) = 0.02$ 其中事件 D 代表所選取的產品是有瑕疵的集合。請問假設觀察一個隨機選取的產品且發現它有瑕疵，則此瑕疵品最有可能是來自那一個生產方法？

【擬答】：

$$P(D) = P(A) \times P(D|A) + P(B) \times P(D|B) + P(C) \times P(D|C) \\ = 0.03 \times 0.01 + 0.2 \times 0.03 + 0.5 \times 0.02 = 0.019$$

$$\text{(一)} P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.03 \times 0.01}{0.019} = 0.1579$$

$$\text{(二)} P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0.2 \times 0.03}{0.019} = 0.3158$$

公職王歷屆試題 (104 地方政府特考)

$$(三) P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.5 \times 0.02}{0.019} = 0.5263$$

所以此瑕疵品最有可能來自方法 C

四、請找出所有滿足 $\sin(z) = -i$ 之複數 z 的解，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

【擬答】：

$$\begin{aligned} \sin z = -i &\Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i \\ &\Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 2 \\ &\Rightarrow (e^{iz})^2 - 2e^{iz} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{iz} = 1 \pm \sqrt{2} \text{ (負不合)} \\ \therefore e^{iz} &= 1 + \sqrt{2} \\ &\Rightarrow i(z - 2k\pi) = \ln(1 + \sqrt{2}) \\ &\Rightarrow z = 2k\pi + \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{i} \\ &= 2k\pi - i\ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

乙、測驗題部份：

- (A) 1. 令 a, b, c 為三向量，有關其內積(inner product)與外積(cross product)之敘述，下列等式何者正確？
- (A) $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ (B) $a \cdot (b \times c) = c \cdot (b \times a)$
 (C) $a \cdot (b \times c) = (c \times b) \cdot a$ (D) $a \cdot (b \times c) = b \cdot (a \times c)$
- (B) 2. 若 F, G, H 為 R^3 上之向量， c 為任意純量，且定義 $[F, G, H] = F \cdot (G \times H)$ ，則下列敘述何者錯誤？
- (A) $[F, G, H] = -[F, G, H]$
 (B) $[F, G, H] = [G, F, H]$
 (C) $[F, aG + bK, H] = a[G, H, F] + b[F, K, H]$
 (D) 若 $F = G + H$ ，則 $[F, G, H] = 0$
- (C) 3. 設 $u = (1, 0, 2); v = (2, 1, 0); w = (0, 1, 1)$ ，則由 u, v 及 w 所形成的平行立方體(parallelepiped)體為何？
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
- (D) 4. 一微分方程式 $y'' + 4y = 8x^2$ ，下列何者不會出現在其一般解(general solution)中？
- (A) $\cos 2x$ (B) $\sin 2x$ (C) $2x^2 - 1$ (D) $\sqrt{2}x + 2$
- (C) 5. 複變函數 $f(z) = \frac{z^2 - 3z - 4}{z^3 - 4z^2 + z - 4}$ 在複數平面上，下列那一點不連續？
- (A) $1+i$ (B) -1 (C) i (D) 4
- (A) 6. 令複數 $z = 1+i$ ，則 $\ln(z)$ 可為下列何者？
- (A) $\ln(\sqrt{2}) + 0.25\pi i$ (B) $\ln(\sqrt{2}) + \pi i$ (C) $\ln(\sqrt{2}) - \pi i$ (D) $\ln(\sqrt{2}) - 0.25\pi i$
- (A) 7. 矩陣 $A = \begin{vmatrix} 8 & 20 & 0 \\ -2 & \alpha & 0 \\ -6 & -12 & -2 \end{vmatrix}$ ，若 $\lambda = 2$ 為其一特徵值(eigenvalue)，則 $\alpha = ?$
- (A) $-\frac{14}{3}$ (B) $-\frac{15}{3}$ (C) $-\frac{14}{5}$ (D) -3

- (B) 8. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 之對角化(diagonalization)矩陣 $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, $a \leq b \leq c$, 令 $A = XDX^{-1}$, 其中 $X = [x_1, x_2, x_3]$ 試問下列結果何者正確?

(A) $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- (B) 9. 假設有一矩陣 $\begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{bmatrix}$ 其行列式值為 7, 求 $\begin{bmatrix} x+p & y+q & z+r \\ -p & -q & -r \\ 4a & 4b & 4c \end{bmatrix}$ 的行列式值為多少?
 (A)-28 (B) 28 (C)-56 (D) 56

- (C) 10. 下列矩陣關係式, 何者正確?

(A) $\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} \cosh \vartheta & \sinh \vartheta \\ \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cosh n\vartheta & \sinh n\vartheta \\ \sinh n\vartheta & \cosh n\vartheta \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \\ \cosh \vartheta & \sinh \vartheta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \\ \cosh \vartheta & \sinh \vartheta \end{bmatrix}$

- (B) 11. 將複函數 $f(z) = \frac{1}{3-z}$ 表為泰勒級數(Taylor series)展開式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$, 則下列敘述何者錯誤?
 (A) 此泰勒級數的收斂區域為 $|z-1| < 2$ (B) $a_0 = 1$

(C) $a_2 = \frac{1}{8}$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

- (C) 12. 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z|=1$, 試求積分 $\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} dz$ 為何?

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{5}$ (D) $2\pi i$

- (B) 13. $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \delta(t - \pi)$, 初始條件 $y(0) = y'(0) = 0$ 。其中 $\delta(t)$ 為單位脈衝函數

(Unitimpulscfunction), 則 $y(t = \frac{3}{2}\pi)$?

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) π

- (B) 14. 令 $f(t) = \cos^2(t), t > 0$, 試求 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換(Laplacetransform) $F(s) = L\{f(t)\}$?

(A) $\frac{3}{s} + \frac{4}{s^2}$

(B) $\frac{1}{2s} + \frac{s}{2s^2 + 8}$

(C) $\frac{1}{s+2} + \frac{s}{s^2 + 8}$

(D) $\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^3 + 2}$

公職王歷屆試題 (104 地方政府特考)

- (D) 15. 若 $y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$ 為微分方程式 $y' = 2xy$ 的解, 其中 $y' = \frac{dy}{dx}$, 則下列何者正確?
(A) $a = 0$ (B) $b = 1$ (C) $c = 2$ (D) $d = 2$
- (C) 16. 假設每本書每一章平均會有 2 個錯誤, 隨機抽檢某書的某一章, 則至少有 2 個錯誤的機率約為何? ($e = 2.72, e^2 = 7.39, e^3 = 20.09$)
(A) 0.2 (B) 0.4 (C) 0.6 (D) 0.8
- (A) 17. 離散隨機變數 X 與 Y 之結合機率質量函數 (joint probability mass function) 為:
$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2), & \text{if } (x,y) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
, 試問 c 值為何?
(A) 0.05 (B) 0.5 (C) 1 (D) 5
- (C) 18. 某工廠有 2 台機器 A 和 B 分別生產 40% 及 60% 的產品。已知, 2 台機器做的產品中分別有 2% 及 3% 的瑕疵品。假設現任意選擇一個產品是瑕疵品, 請問它由機器 B 所生產的機率為何?
(A) 0.026 (B) $8/26$ (C) $18/26$ (D) 0.018
- (D) 19. 假設 X 和 Y 為兩個獨立之隨機變數, 其均勻分布於區間 $[0,1]$ 。求方程式 $t^2 + Xt + 2Y = 0$ 有兩個實根之機率為何?
(A) $1/3$ (B) $1/8$ (C) $1/12$ (D) $1/24$
- (B) 20. 設 $y = a(t)$ 為 $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4$ 之解, 則 $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)$ 之值為何?
(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) ∞