

105 年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及 105 年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試

等 別：高員級考試

類 科 (別)：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

甲、申論題：(50 分)

一、 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，計算 $\sin A = ?$ (10 分)

【擬答】：

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ 或 } 3$$

$$\text{(一)} \lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(二)} \lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sin A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(-1) & 0 \\ 0 & \sin 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sin 3 - \sin 1}{2} & \frac{\sin 3 + \sin 1}{2} \\ \frac{\sin 3 + \sin 1}{2} & \frac{\sin 3 - \sin 1}{2} \end{bmatrix}$$

二、函數 $\varphi(x, y, z) = 18xyz + e^x$ 的梯度 (gradient) 向量為何？此梯度向量的旋度 (curl) 為何？
(10 分)

【擬答】：

$$\begin{aligned} \text{(一)} \nabla \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j + \frac{\partial \Phi}{\partial z} k \\ &= (18yz + e^x) i + 18xz j + 18xy k \end{aligned}$$

二) 設 $F = \nabla \Phi$

$$\Rightarrow \text{curl} F = \nabla \times F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 18yz + e^x & 18xz & 18xy \end{bmatrix} = 0$$

志光 學 儒

熱門類科推薦

郵局 考試	專業職(二) 內勤	1.國文及英文 2.企業管理大意 3.郵政三法大意 (含郵政法、郵政儲金匯兌法、簡易人壽保險法)
	專業職(二) 外勤	1.國文 2.企業管理大意 3.郵政法大意及交通安全常識 (備註:外勤今年不考英文了喔!)
國營 事業	企管	1. 國文(論文寫作)、※英文(測驗題型) 2. ※專業A: 企業概論+法學緒論 3. 專業B: 管理學+經濟學



三、求解 $3y^4 - 1 + 12xy^3y' = 0; y(1) = 2$ ，其中 $y' = \frac{dy}{dx}$ 。(15 分)

【擬答】：

$$3y^4 - 1 + 12xy^3y' = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{12y^3}{3y^4 - 1} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln|3y^4 - 1| = -\ln|x| + c_1$$

$$\Rightarrow 3y^4 - 1 = \frac{c}{x}$$

$$\text{又 } y(1) = 2 \Rightarrow C = 47$$

$$\therefore 3xy^4 - x = 47$$

四、假設兩個隨機變數 X 和 Y 的聯合密度函數 (joint density function) 為

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, 0 < x < y < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}, \text{請問:}$$

(一) X 和 Y 是否為獨立的隨機變數?(請說明理由)(5 分)

(二) $P(0.25 < X < 0.5 | Y = 0.75) = ?$ (10 分)

【擬答】：

$$\text{(一)} f(x) = \int f(x, y) dy = \int_x^1 2 dy = 2(1 - x), 0 < x < 1$$

$$f(y) = \int f(x, y) dx = \int_0^y 2 dx = 2y, 0 < y < 1$$

$$\therefore f(x)f(y) = 4(1 - x)y$$

$$\therefore f(x, y) \neq f(x)f(y)$$

$\Rightarrow X, Y$ 不是獨立隨機變數

$$\text{(二)} f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}, 0 < x < y < 1$$

職 王

公職王歷屆試題 (105 鐵路特考)

$$\Rightarrow f(x|y=0.75) = \frac{4}{3}, 0 < x < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow p(0.25 < x < 0.5) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{4}{3} dx = \frac{1}{3}$$

乙、測驗題部分：(50 分)

- (A) 1. 求出路徑 C 之單位切線向量(unit tangent vector)，其中 $C: x = \cos(t) + t\sin(t)$ $y = \sin(t) - t\cos(t)$ 及 $z = t^2$ ：
- (A) $(1/\sqrt{5})[\cos(t)i + \sin(t)j + 2k]$ (B) $(1/\sqrt{5})[\sin(t)i + \cos(t)j + 2tk]$
 (C) $(1/\sqrt{5})[\sin(t)i + \cos(t)j + 2k]$ (D) $(1/\sqrt{1+4t^2})[\sin(t)i + \cos(t)j + 2tk]$
- (C) 2. 求力向量 $F = i - (y)j + (xyz)k$ ，使一質點沿曲線 $x = t, y = -t^2, z = t$ 由 $(0, 0, 0)$ 移至 $(1, -1, 1)$ 所做之功：
- (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4
- (D) 3. 設 $u(t), v(t), w(t)$ 為三向量函數，則下列何者錯誤？
- (A) $(cv(t))' = cv'(t)$ (c 為一常數) (B) $(u(t) + v(t))' = u'(t) + v'(t)$
 (C) $(u(t) \cdot v(t))' = u'(t) \cdot v(t) + v'(t) \cdot u(t)$ (D) $(u(t) \times v(t))' = u'(t) \times v(t) + v'(t) \times u(t)$
- (B) 4. $F = (2xy)i + (xyz^2 - \sin(yz))j + (ze^{x+y})k$ 之散度(divergence) $\text{div}F$ 為何？
- (A) $(2y)i + (xz^2 - z \cos(yz))j + (e^{x+y})k$ (B) $(2y) + (xz^2 - z \cos(yz)) + (e^{x+y})$
 (C) $(-2x)i - (ze^x)j + (2z - 1)k$ (D) $(-2x) - (ze^x) + (2z - 1)$
- (D) 5. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，且 $X^{-1}AX = D$ ，其中 D 為對角矩陣，求 $\det(A^{100})$ ：
- (A) 5^{100} (B) 5^{101} (C) $5^{100} + 4^{100}$ (D) 0

志光 學 儒

專業為導向 考取為目標



7月

針對初等考試衝刺

1月

再戰鐵路考試上榜

6月

只繳一次費用 享雙項考試課程輔導

01

扎實
正規課程

02

重點
加強講座

03

精準
題庫解析

04

精華
重點整理

(D) 6. 下列那一矩陣滿足 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$?

(A) $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$ (B) $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$ (C) $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ (D) $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

(D) 7. 令 s 為 $(1, 0, i)$ 與 $(1, 2, 1)$ 在三維複數空間所生成之子空間，則下列何者在 s 之正交補集 (orthogonal complement) S^\perp 中?

(A) $(1, 0, -i)$ (B) $(2, 1+i, -2i)$
 (C) $(1+i, 1-i, 3)$ (D) $(2, -1+i, -2i)$

(D) 8. 一個矩陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，下列何者輔因子 (cofactor) 錯誤?

(A) $C_{11} = 0$ (B) $C_{21} = -48$ (C) $C_{31} = 30$ (D) $C_{41} = 3$

(A) 9. 令複數 $z = 1+i$ ，則 z 亦可改寫為何?

(A) $\sqrt{2}e^{i(0.25\pi+2n\pi)}$ ， n 為整數 (B) $-\sqrt{2}e^{i(0.25\pi+2n\pi)}$ ， n 為整數
 (C) $-e^{i(0.25\pi+2n\pi)}$ ， n 為整數 (D) $e^{i(0.25\pi+2n\pi)}$ ， n 為整數

(B) 10. 已知複變數函數 $f(z) = \frac{1-\cosh z}{z^3}$ 的奇異點 (singular point) 是為一個極點 (pole)，試決定此極點的階數 (order) M 及對應的留數 (residue) B 分別為何?

(A) $M = 3, B = \frac{-1}{2}$ (B) $M = 1, B = \frac{-1}{2}$
 (C) $M = 3, B = \frac{1}{2}$ (D) $M = 1, B = \frac{1}{2}$

(B) 11. 微分方程式 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 11x \frac{dy}{dx} + 50y = 0$ 之通解為 $y = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln|x|) + c_2 \sin(\beta \ln|x|)]$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數，求 $\alpha + \beta$:

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(D) 12. 採用級數解法來求微分方程式 $(1+x)y' = 2y$ 的解可得下列的表示式 $y(x) = A(a+bx+cx^2+...)$ ，試求 a, b, c 值:

(A) $a = 2, b = 2, c = 1$ (B) $a = 2, b = 1, c = 2$
 (C) $a = 1, b = 1, c = 2$ (D) $a = 1, b = 2, c = 1$



感謝眾多學員的肯定

志光 學儒

輔導用心

補習班給考生除了課程師資之外，就是心理上的支持，我想說，還好來到志光。

鄭揚仁

104鐵路佐級事務管理

師資專業

特別感謝老師，幫考生建立了清楚完整的法學架構體系表，解題時快速抓到方向。

王子豪

104鐵路佐級事務管理

教材精準

課本讀起來讓人很快進入狀況並打好基處，我是把課本細讀後，再針對重點部分加強記憶。

蔡宛錚

104鐵路佐級運輸營業

資料豐富

志光擁有豐富資料庫及考古題解析，讓我能夠隨時補充運用。

蔡孟玲

104鐵路高員級運輸營業

- (A) 13. 已知微分方程式 $x^2 y'' + axy' + by = 0$ 的通解為 $y(x) = c_1 \frac{1}{\sqrt{x}} + c_2 x^2$ ，試求 a 、 b 之值，並判定下列何者正確？(題中 a 、 b 、 c_1 及 c_2 為常數)
 (A) $a+b = -1.5$ (B) $a+b = 1.5$ (C) $a+b = -2.5$ (D) $a+b = 2.5$
- (C) 14. 求 $u(t)$ 和 $2u(t)$ 的迴旋(convolution)，其中 $u(t)$ 為單位步階函數：
 (A) 0 (B) $2u(t)$ (C) $2tu(t)$ (D) $(2t-t^2)u(t)$
- (C) 15. 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換(Laplace transform) $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ ，令 $L\{f(t)\} = \frac{9e^{-2s}}{s^2 + 4s + 13}$ ，則 $f(t)$ 為何？下列選項中的 $u(t)$ 為單位步階函數。
 (A) $[3e^{-2t} \sin 3t]u(t-2)$ (B) $[9e^{-2t} \cos 3t]u(t-2)$
 (C) $[3e^{-2(t-2)} \sin 3(t-2)]u(t-2)$ (D) $[9e^{-2(t-2)} \cos 3(t-2)]u(t-2)$
- (D) 16. 下列選項何者為 $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ 於 $z=0$ 之泰勒展開式？
 (A) $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n, |z| < 1$ (B) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n, |z| < 1$
 (C) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n, |z| < 1$ (D) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n, |z| < 1$
- (B) 17. 已知一部汽車引擎之生命遵循平均值為 10 年之指數分佈(exponential distribution)，求一部用了 10 年之汽車引擎可以再用 5 年之機率為何？
 (A) $e^{-1/4}$ (B) $e^{-1/2}$ (C) e^{-2} (D) e^{-4}
- (A) 18. 離散隨機變數 X 與 Y 之結合機率質量函數(joint probability mass function)為

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx, & \text{if } x = 1,2,3, y = 1,2,3 \\ y & \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
 試求條件機率 $P(X=1|Y \leq 2)$ ：
 (A) $1/6$ (B) $1/4$ (C) $1/3$ (D) $1/2$
- (B) 19. 從 1 到 1000 的整數中隨意任選一個數字，則這個數字可以被 3 或是 5 整除的機率為何？
 (A) 0.333 (B) 0.467 (C) 0.533 (D) 0.599
- (B) 20. 給定一個連續隨機變數 X ，其累積分佈函數(cumulative distribution function) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-8x}, & x \geq 0 \end{cases}$ ，則機率 $P(X=1)$ 之值為何？
 (A) $1 - e^{-8}$ (B) 0 (C) 1 (D) $8e^{-8}$