

# 104 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：四等考試

類 科：經建行政、交通技術

科 目：統計學概要

一、已知隨機變數  $X$  的期望值  $E(X) = 5$ ， $X$  的變異數  $V(X) = 39$ 。令  $Y = -6X + 3$ ，試計算：

(一) 變異數， $V(-5X - 50)$ 。

(二)  $Y$  的期望值， $E(Y)$ 。

(三)  $Y$  平方的期望值， $E(Y^2)$ 。

(四) 共變異數， $Cov(2X, 3Y)$ 。

(五) 相關係數， $\rho_{XY}$ 。

【擬答】：

$$(一) \text{Var}(-5X - 50) = 25 \text{Var}(X) = 25 \times 39 = 975$$

$$(二) E(Y) = E(-6X + 3) = -6E(X) + 3 = -6 \times 5 + 3 = -27$$

$$(三) \text{Var}(Y) = \text{Var}(-6X + 3) = 36 \text{Var}(X) = 36 \times 39 = 1404$$

$$\text{且 } \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$\Rightarrow E(Y^2) = \text{Var}(Y) + [E(Y)]^2 = 1404 + (-27)^2 = 2133$$

$$(四) \text{Cov}(2X, 3Y) = \text{Cov}(2X, -18X + 9) = -36 \text{Cov}(X, X)$$

$$= -36 \text{Var}(X) = -36 \times 39 = -1404$$

$$(五) Y = -6X + 3 \Rightarrow \rho_{XY} = -1$$

二、大大瘦身公司想知道顧客參加他們的運動計畫後(1)減少的平均體重是否大於 3 公斤，(2)減少的體重標準差是否超過 2 公斤，於是自參加瘦身計畫的顧客中隨機抽取 6 人，其減少的體重如下：

5, 1, 2, 1, 1, 2 (單位：公斤)

假設減少的體重呈常態分配。

(一) 以顯著水準  $\alpha = 0.01$  檢定減少的平均體重是否大於 3 公斤。

(二) 以顯著水準  $\alpha = 0.05$  檢定減少的體重標準差是否超過 2 公斤。

【擬答】：

$$(一) \bar{X} = 2, S^2 = 2.4$$

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 3 \\ H_1: \mu < 3 \end{cases}$$

因為母體為常態，且  $\sigma^2$  未知，利用  $t$  檢定

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{t \mid t < -t_{0.01}(5) = -3.365\}$$

$$\text{檢定統計量 } t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{2 - 3}{\frac{\sqrt{2.4}}{\sqrt{6}}} = -1.58 \notin C$$

$\Rightarrow$  not Re  $H_0$

結論：沒有證據顯示減少的平均體重小於 3 公斤，即在  $\alpha = 0.01$  下大大瘦身公司的顧客平均減少體重 3 公斤並非不可能。

$$(二) \begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq 4 \\ H_1: \sigma^2 < 4 \end{cases}$$

因為母體為常態，且  $\mu$  未知，利用  $\chi^2$  檢定

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{\chi^2 \mid \chi^2 < \chi_{0.95}^2(5) = 1.145476\}$$

$$\text{檢定統計量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(6-1) \times 2.4}{4} = 3 \notin C$$

公職王歷屆試題 (104 地方政府特考)

⇒ not Re Ho

結論：沒有證據顯示減少的體重標準差小於 2 公斤，即在  $\alpha=0.05$  下，大大瘦身公司的顧客平均減少體重標準差超過 2 公斤並非不可能。

三、一因子完全隨機化 (complete randomized) 設計中，因子，x，可以是固定的 (fixed) 或隨機的 (random)。假設因子有 a 水準及 n 反覆 (replicates)：

(一)說明固定因子和隨機因子的差異。

(二)分別寫出固定效應模式 (fixed effects model)，隨機效應模式 (random effects model) 及其假設。令 y 為反應變數 (response variable)。

(三)以變異數分析方法檢定因子是否顯著時，虛無假設和對立假設為何？請分別就固定因子和隨機因子說明。

【擬答】：

(一)

1. 固定因子：a 個水準由實驗者選定，只檢定有關處理平均值的假設，且結論只能應用所考慮的水準上，不能類推至未考慮的其它處理上。

2. 隨機因子：a 個水準來自母體的 1 個隨機樣本，其結論可以類推到母體的所有處理。

(二)

1. 固定效應模式：
$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

且  $Y_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu + \tau_i, \sigma^2), \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

2. 隨機效應模式：
$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

且  $\text{Var}(Y_{ij}) = \sigma_\tau^2 + \sigma^2, \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

$\tau_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\tau^2), \tau_i$  與  $\varepsilon_{ij}$  獨立

(三) 1. 固定因子  $\begin{cases} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0 \\ H_1 : \tau_i \text{不全為} 0, i = 1, 2, \dots, a \end{cases}$

2. 隨機因子  $\begin{cases} H_0 : \sigma_\tau^2 = 0 \\ H_1 : \sigma_\tau^2 > 0 \end{cases}$

(參考：原著 Montgomery(黎正中譯)：實驗設計與分析；102 年 3 月；高立圖書)

四、假設隨機變數 X 為燈泡壽命，服從指數分配，且其機率密度函數為：

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

(一)燈泡壽命超過平均壽命的機率為何？

(二)假設燈泡平均壽命為 100 小時，廠商欲控制燈泡在保固期內故障的機率不超過 0.1，則保固期應訂多少？

【擬答】：

$$(一) X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow P(X > \frac{1}{\lambda}) = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} = 0 - (-e^{-1}) = e^{-1} = 0.3679$$

$$(二) E(X) = \frac{1}{\lambda} = 100 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}, X \sim \exp(\lambda = \frac{1}{100})$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}, x \geq 0$$

設燈泡保固期為 t 小時

公職王歷屆試題 (104 地方政府特考)

$$\Rightarrow p(x \leq t) \leq 0.1 \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx \leq 0.1$$

$$\Rightarrow -e^{-\frac{x}{100}} \Big|_0^t \leq 0.1 \Rightarrow e^{-\frac{t}{100}} \geq 0.9$$

$$\Rightarrow t \leq 10.54$$

所以保固期最多訂 10 小時

五、8 個項目分別為：溫度、性別、智商、體重、距離、所屬學院別、滿意度分數 (1, 2, 3)、教育程度 (1. 小學 2. 中學 3. 大學)

(一) 那些項目為衡量尺度 (measurement scale) 中的順序尺度 (ordinal scale) ?

(二) 那些項目為衡量尺度中的區間尺度 (interval scale) ?

(三) 那些項目為衡量尺度中的比例尺度 (ratio scale) ?

【擬答】：

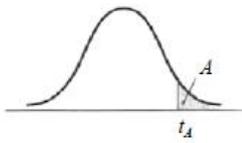
(一) 滿意度，教育程度

(二) 溫度，智商

(三) 體重，距離

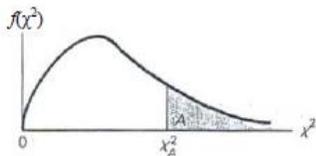
公  
職  
王

Critical Values of the Student *t* Distribution



Degrees of Freedom	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
55	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
65	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
75	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
85	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
95	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
110	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
130	1.288	1.657	1.978	2.355	2.614
140	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611
150	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609
160	1.287	1.654	1.975	2.350	2.607
170	1.287	1.654	1.974	2.348	2.605
180	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603
190	1.286	1.653	1.973	2.346	2.602
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Critical Values of the  $\chi^2$  Distribution



Degrees of Freedom	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000039	0.000157	0.000982	0.00393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100	104
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	102	107	112	116
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	108	113	118	124	128
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118	124	130	136	140

