104 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、醫學工程
科 目：工程數學

甲、申論題部分：

一、請用級數方法求解 $y'=2xy$，且以級數法示其解，至少求 x^6。（使用其他非級數法解不計分）

【擬答】：

$$令 y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nX^n$$

$$\Rightarrow y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nX^{n-1}\text{代入}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}nC_nX^{n-1}=2X\sum_{n=0}^{\infty}C_nX^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)C_{n+1}X^n-2\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}X^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}nC_nX^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}C_nX^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}-2\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}\right]X^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}-2\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}=0$$

㈠當 $n=0$，時，$C_1=0$

㈡當 $n=1,2,3\ldots$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)C_{n+1}-2C_{n-1}\right]=0$

$$\Rightarrow (n+1)C_{n+1}-2C_{n-1}=0$$

$$\Rightarrow C_{n+1}=\frac{2}{n+1}C_{n-1},\ n=1,2,3,\ldots$$

1. $n=1\Rightarrow C_2=C_0$，C_0為任意實數
2. $n=2\Rightarrow C_3=\frac{2}{3}C_1=0$
3. $n=3\Rightarrow C_4=\frac{1}{2}C_2=\frac{1}{2}C_0$
4. $n=4\Rightarrow C_5=\frac{2}{5}C_3=0$
5. $n=5\Rightarrow C_6=\frac{1}{3}C_4=\frac{1}{6}C_0$

$$\therefore y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nX^n$$

$$=C_0+C_1X+C_2X^2+C_3X^3+C_4X^4+C_5X^5+C_6X^6+\ldots$$

$$=C_0+C_0X^2+\frac{1}{2}C_0X^4+\frac{1}{6}C_0X^6+\ldots$$

二、設λ_1,λ_2及λ_3為一 3 × 3 的實數矩陣 M 的整數特徵值(eigenvalues),且其中$\lambda_2=\lambda_3\neq\lambda_1$。M 的行列式值(determinant)為 36,且其跡(trace)為 10。令 I 為 3 × 3 單位矩陣(identity matrix),請找出$(M\text{-}I)^2$的全部特徵值。

【擬答】：

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=trace(M)=10\\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\det(M)=36\end{cases}$$

且$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$為整數,$\lambda_2=\lambda_3\neq\lambda_1$

$\Rightarrow\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=3$

又$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow M-I$之特徵值為$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=2$

$\Rightarrow(M-I)^2$之特徵值為$\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2$

即為9,4,4

三、設 X 與 Y 是兩互相獨立的隨機變數(independent random variable),且其機率密度函數(probability density function)分別表示如下:

$$f_X(x)=\begin{cases}1/2,1\le x\le 3\\0,elsewhere\end{cases}\quad;\quad f_Y(y)=\begin{cases}1/3,\quad 2\le x\le 5\\0,\quad elsewhere\end{cases}$$

設$W=X+Y$。

求

㈠W的機率密度函數(probability density function) $f_W(W)$。

㈡畫出$f_W(W)$之函數圖形。

【擬答】：

㈠

$\because x,y$為獨立隨機變數

$$\Rightarrow f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},1\le X\le 3,2\le y\le 5$$

$$設\begin{cases}W=X+Y\\U=X\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=U\\Y=W-U\end{cases}$$

$$\Rightarrow J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial w}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1$$

$$\Rightarrow f_{UW}(u,w)=\frac{1}{6},\ 1\le u\le 3,3\le w\le 8,\ 2\le w-u\le 5$$

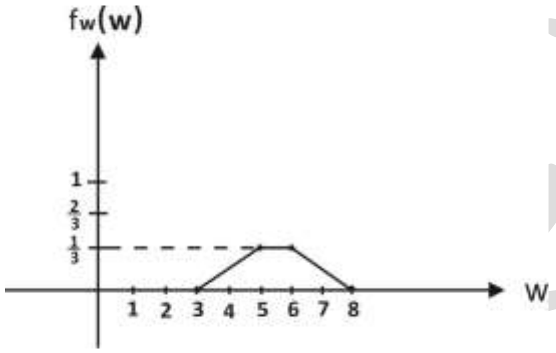
$$1.\ 3\le w<5\Rightarrow f_W(w)=\int_1^{w-2}\frac{1}{6}du=\frac{1}{6}(w-3)-\frac{w}{6}-\frac{1}{2}$$

$$2.\ 5\le w<6\Rightarrow f_W(w)=\int_1^{3}\frac{1}{6}du=\frac{1}{3}$$

3.
$$6 \le w < 8 \Rightarrow f_W(w) = \int_{w-5}^{3} \frac{1}{6} du = \frac{1}{6}(8-w) = \frac{4}{3} - \frac{W}{6}$$

$$\therefore f_W(w) = \begin{cases} \frac{w}{6} - \frac{1}{2}, 3 \le w < 5 \\ \frac{1}{3}, 5 \le w < 6 \\ \frac{4}{3} - \frac{w}{6}, 6 \le w \le 8 \end{cases}$$

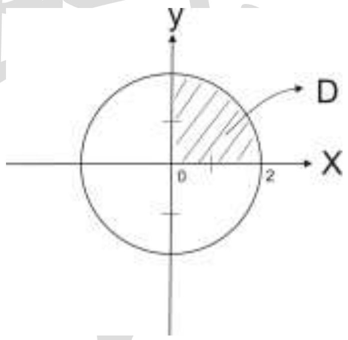
(二)



四、令區域D定義為$0 \le y \le \sqrt{4-x^2}, 0 \le x \le 2$,求$\iint_D (x^2+y^2)^{4/3} dA$。(10 分)

【擬答】：

$D: 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}, 0 \le X \le 2$



令$\begin{cases} X = r\cos\vartheta \\ Y = r\sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ dxdy = rdrd\vartheta \end{cases}$

$$\iint_D (x^2+y^2)^{\frac{4}{3}} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (r^2)^{\frac{4}{3}} rdrd\vartheta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^{\frac{11}{3}} drd\vartheta = \frac{12\sqrt[3]{4}}{7}\pi$$

乙、測驗題部分：

(D) 1. 向量場$F = 2xyi + xe^y j + 2zk$在點$p = (-1,0,1)$的旋度(curl)為何?
(A)$2i - j + k$ (B)$-j + 2k$ (C)$-ej + 2k$ (D)$3k$

(D) 2. 試用 diverigence theorem,求面積分$I = \iint_S (x^3 dydz + x^2 ydxdz + x^2 zdxdy)$,其中$S$為一封閉面,包括一圓柱面$x^2+y^2=a^2 (0 \le z \le b)$及在$z=0$及$z=b$之二圓面積$(x^2+y^2 \le a^2)$

(A) $\frac{3\pi}{2}a^4b$　　(B) $\frac{5\pi}{2}a^4b$　　(C) $\frac{3\pi}{4}a^4b$　　(D) $\frac{5\pi}{4}a^4b$

(B) 3. 定義函數為 □$(x,y,z)=xy-yz+xyz$，請計算點 $P=(0,-1,1)$ 在 $u=i+j+k$ 方向的改變率(rate of change)?

(A) 2　　(B) -2　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) $-\sqrt{5}$

(D) 4. 若向量 $F=i-3k, G=2j, A=\|F+G\|$ 為 $F+G$ 的 2-norm，則 A 值為:

(A) $i+2j-3k$　　(B) $i+2j+3k$　　(C) 14　　(D) $\sqrt{14}$

(B) 5. 一矩陣 $M=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$，下列何者錯誤?

(A) M 可對角化

(B) 存在矩陣 $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，使得 $P^{-1}MP=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

(C) M 之特徵值(eigenvalue)為 2,-2,3

(D) 存在可逆矩陣 Q，使得 $Q^{-1}MQ=D$，則 M 與 D 為相似矩陣(similar matrices)

(D) 6. 已知 $\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=20$，則 $\begin{vmatrix}a+g & b+h & c+i\\ -2d & -2e & -2f\\ -2g & -2h & -2i\end{vmatrix}$ 之值為何?

(A) 0　　(B) 20　　(C) 40　　(D) 80

(A) 7. 設 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & -17 & 8\end{bmatrix}$，下列何者不是 A 的特徵值(eigenvalue)?

(A) 2　　(B) 4　　(C) $2+\sqrt{3}$　　(D) $2-\sqrt{3}$

(D) 8. 一矩陣 $M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$，下列何者錯誤?

(A) $M^3=\begin{bmatrix}-5 & 16 & 9\\ -2 & -5 & -23\\ -23 & 9 & 11\end{bmatrix}$

(B) $M^3-7M^2+19M=\begin{bmatrix}19 & 0 & 0\\ 0 & 19 & 0\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix}$

(C) M 之特徵多項式(characteristic polynomial)為 $\lambda^3-7\lambda^2+19\lambda-19$

(D) $M^4=30M^2-114M+139I$

(A) 9. 試計算複數多項式(complex polynomial) $p(z)=z^6-5z^4+z^3-2z$ 在 $|z|=1$ 的圓內有多少個零點(zeros)?(包括重複數(multiplicities))

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(D) 10. 設 c 為 $|z|=2$ 之逆時針方向之封閉曲線，則 $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$ 之值為何?

(A) 0　　(B) $i2\pi$　　(C) $i6\pi$　　(D) $i10\pi$

(C) 11. 化簡 $\overline{(6-2i)(1+i)}$ 可得:

(A) $4i+8$　(B) $4i-8$　(C) $-4i+8$　(D) $-4i-8$

(A) 12. 下列何者為此階梯函數 $f(t)=\begin{cases} 0,0\le t<1 \\ 1,1\le t<3 \\ -1,3\le t \end{cases}$ 之拉普斯轉換?

(A) $\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{2}{s}e^{-3s}$　(B) $\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{2}{s^2}e^{-3s}$　(C) $\frac{1}{s}e^{s}+\frac{2}{s}e^{-3s}$　(D) $\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{2}{s}e^{-3s}$

(D) 13. 下列那一個常係數齊次偏微分方程式為橢圓型(elliptic)?

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$　(B) $\frac{\partial u}{\partial y}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$　(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

(B) 14. $xy'+2y=x^3y^2, y=?$

(A) $\frac{1}{C-x}$　(B) $\frac{1}{Cx^2-x^3}$　(C) $\frac{1}{Cx-x^2}$　(D) $\frac{1}{Cx^3-x^4}$

(A) 15. 令 $f(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{e^{\pi t}-1}{\pi^2}, t>0$, 若 $F(s)=L\{f(t)\}$ 為 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換(Laplace tuansform), 試求 $F(2\pi)$?

(A) $\frac{3}{8\pi^3}$　(B) $\frac{3}{8\pi^2}$　(C) $\frac{1}{2\pi^3}$　(D) $\frac{1}{2\pi^2}$

(B) 16. 已知週期為 2π 之週期函數 $f(t)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2}, -\pi<1<0 \\ \frac{\pi}{2}, 0<t<\pi \end{cases}$, 此週期函數之傅立葉分析級數為 $2\left(\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\ldots\right)$。由此結果可以推得圓周率 π 的表示法為:

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{n-\frac{1}{2}}\right)$

(B) 17. 下列何者不為拉普拉斯方程式(Laplace Equation) $\nabla^2 u=0$ 的解?

(A) $x+y+xy+4z$　(B) $x^2+y^2+xy+yz+zx$

(C) x^3-3xy^2+zx　(D) $ln(x^2+y^2)$, 其中 $x^2+y^2\neq 0$

(B) 18. 假設隨機變數 X 的累積分布為 $F(X)=\begin{cases} 0, 當 x<1 \\ 1/4, 當 1\le x<3 \\ 1/2, 當 3\le x<5 \\ 3/4, 當 5\le x<7 \\ 1, 當 7\le x \end{cases}$, 請問 $P(X\le 5 \mid X\ge 2)=?$

(A) 1/4　(B) 2/3　(C) 1/2　(D) 3/4

(D) 19. 二枚錢幣投擲出現正面之機率分別為 $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{10}$, 若隨機選擇出一枚錢幣並投擲二次, 試求第一次出現正面之機率為何?

(A) $\frac{1}{20}$　(B) $\frac{1}{10}$　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\frac{3}{10}$

(B) 20. 假設兩個隨機變數 X 和 Y 的結合機率密度函數(joint probability density function)為 $f(x,y)=\begin{cases}4xy, 當 0<x<1, 0<y<1\\ 0, 其他\end{cases}$，試問 $P(X<Y)=?$

(A) 1　(B) 1/2　(C) 1/3　(D) 2/3