

## 104 年公務人員普通考試試題

類 科：統計

科 目：統計學概要

一、一查帳員隨機自某公司 500 筆單據中抽取 20 筆單據，以下表格為每一筆單據的金額與該單據是否遵循審計法規。

編號	金額(千元)	遵循法規	編號	金額(千元)	遵循法規
1	278	是	11	188	否
2	192	是	12	212	否
3	310	是	13	92	是
4	94	否	14	56	是
5	86	是	15	142	是
6	335	是	16	37	是
7	310	否	17	186	否
8	290	是	18	221	是
9	221	是	19	219	否
10	168	是	20	305	是

(一)估計該公司 500 筆單據的總金額。

(二)在 95% 的信心水準下，題(一)的最大可能誤差為何？

(三)在顯著水準為 0.05 的情況下，檢定遵循法規與否的單據之平均金額是否相等。

(四)若以單據金額為反應變數(Y)，單據遵循法規與否為解數變數(X，設定「是」為 1、「否」為 0)，建立一簡單線性迴歸模型，計算此迴歸線的截距與斜率。

(五)解釋此估計的斜率在此的意義。並由題(三)結果判斷，在顯著水準為 0.05 時，此估計的斜率是否顯著異於 0。

(六)計算此一簡單線性迴歸模型的判定係數。

【擬答】：

假設母體為常態分配

$$(一) \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{278+192+\dots+305}{20} = 197.1 \text{ (千元)}$$

⇒ 該公司 500 筆單據的總金額估計值為

$$\hat{X} = N\bar{X} = 500 \times 197.1 = 98550 \text{ (千元)}$$

$$(二) \sum_{i=1}^n x_i = 3942, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 933814$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{20-1} \left[ 933814 - \frac{3942^2}{20} \right]} = 90.85$$

$$\Rightarrow S_x = N\sqrt{1-f} \frac{S}{\sqrt{n}} = 500\sqrt{1-\frac{20}{500}} \times \frac{90.85}{\sqrt{20}} = 9952.12$$

∴ 總金額最大可能誤差為

$$B = Z_{0.025} S_x = 1.96 \times 9952.12 = 19506.1552 \text{ (千元)}$$

(三)令  $X_1$  為遵循法規

$X_2$  為不遵循法規

$$\Rightarrow \bar{X}_1 = 195.21, \quad \bar{X}_2 = 201.5, \quad n_1 = 14, \quad n_2 = 6$$

$$S_1^2 = 10215.18, \quad S_2^2 = 4833.5$$

此題須先檢定  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$\text{但 } F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{10215.18}{4833.5} = 2.11, \text{ 其值不大}$$

$$\text{設 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(14 - 1) \times 10215.18 + (6 - 1) \times 4833.5}{14 + 6 - 2} = 8720.27$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{t \mid t > t_{0.025}(18) \text{ 或 } t < -t_{0.025}(18)\} = \{t \mid t > 2.101 \text{ 或 } t < -2.101\}$$

$$\text{檢定統計量 } t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} = \frac{(195.21 - 201.5) - 0}{\sqrt{\frac{8720.27}{14} + \frac{8720.27}{6}}} = -0.138 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示遵循法規與否的單據之平均金額不相等

$$\text{(四) } \sum_{i=1}^n X_i = 14, \sum_{i=1}^n X_i^2 = 14$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 3942, \sum_{i=1}^n Y_i^2 = 933814$$

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = 2733$$

簡單線性迴歸模型估計式

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

$$\text{(1) 斜率 } \hat{\beta} = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n}} = \frac{2733 - \frac{14 \times 3942}{20}}{14 - \frac{14^2}{20}} = -6.2857$$

$$\text{(2) 截距 } \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = \frac{3942}{20} - (-6.2857) \times \frac{14}{20} = 201.5000$$

(五)  $\beta$  的意義為遵循法規的單據比沒有遵循法規的單據平均金額少 6.2857 (千元)

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

由題(三)得結論為沒有證據顯示此估計式的斜率  $\beta \neq 0$

$$\text{(六) } SST = SSY = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2}{n} = 933814 - \frac{3942^2}{20} = 156845.8$$

$$SSR = \beta^2 SSX = (-6.2857)^2 \times \left[14 - \frac{14^2}{20}\right] = 165.94$$

$$\therefore \text{判定係數 } R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{165.94}{156845.8} = 0.00106$$

二、某單位之總務部門依據過去經驗，估計該單位之唯一一台影印機每日影印紙使用狀況如下表： $(X = \text{每日影印紙的使用包數的，一包 } 500 \text{ 張紙})$

$X$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.05	0.25	0.35	0.15	0.15	0.05

公職王歷屆試題 (104 高普考)

- (一)計算該單位每日使用影印紙的平均包數。
- (二)計算該單位每日使用影印紙包數的標準差。
- (三)若某日早上一上班時，該影印機備有 20 包影印紙。問當天下班工作結束時，總務部門預期影印紙會剩幾包？
- (四)續題(三)，計算當天下班工作結束時，影印紙會剩幾包的標準差。
- (五)計算該單位每日使用影印紙的張數之平均與標準差。

【擬答】：

(一) r. v.  $X$ ：每日影印紙的使用包數

$$E(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} xf(x) = 0 \times 0.05 + 1 \times 0.25 + 2 \times 0.35 + 3 \times 0.15 + 4 \times 0.15 + 5 \times 0.05 = 2.25 \text{ (包)}$$

$$(二) E(x^2) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 f(x) = 0^2 \times 0.05 + 1^2 \times 0.25 + 2^2 \times 0.35 + 3^2 \times 0.15 + 4^2 \times 0.15 + 5^2 \times 0.05 = 6.65$$

$$\Rightarrow V_{ar}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 6.65 - 2.25^2 = 1.5875$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{1.5875} = 1.26 \text{ (包)}$$

(三)設 r. v.  $Y$ ：每日影印紙剩下的包數

$$\Rightarrow Y = 20 - X$$

$$\Rightarrow E(Y) = E(20 - X) = 20 - E(X) = 20 - 2.25 = 17.75 \text{ (包)}$$

(四)  $V_{ar}(Y) = V_{ar}(20 - X) = V_{ar}(X) = 1.5875$

$$\Rightarrow \sigma_y = \sqrt{1.5875} = 1.26 \text{ 包}$$

(五)設 r. v.  $Z$ ：每日影印紙使用張數

$$\Rightarrow Z = 500X$$

$$(1) E(Z) = E(500X) = 500E(X) = 500 \times 2.25 = 1125 \text{ (張)}$$

$$(2) V_{ar}(Z) = V_{ar}(500X) = 250000V_{ar}(X) = 250000 \times 1.5875$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \sqrt{396875} = 630 \text{ 張}$$

三、某人力公司想瞭解勞工對於「一週工作 40 小時」與「雙週工作 80 小時」兩種工時型態的偏好，進行一項調查。依勞工所屬部門別得到以下結果(人數)：

工時型態	部門別	
	行政管理	生產維修
一週工作 40 小時	20	55
雙週工作 80 小時	60	55

若  $p_1$  與  $p_2$  分別代表「行政管理」及「生產維修」部門偏好「一週工作 40 小時」的母體比例。

(一)請建構  $p_1 - p_2$  的 95% 信賴區間估計。

(二)在顯著水準為 0.05 的情況下，檢定  $H_0: p_1 = p_2$  及  $H_1: p_1 \neq p_2$ 。

(三)在顯著水準為 0.05 的情況下，檢定「部門別」與「工時型態」之偏好是否有關？

【擬答】：

$$(一) p_1 = \frac{20}{80} = 0.25, p_2 = \frac{55}{110} = 0.5$$

因為  $n_1 = 80, n_2 = 110$  為大樣本，利用  $Z$  分配

$$\text{且 } p_1 \rightarrow p_1, p_2 \rightarrow p_2$$

$$\text{樞紐量 } Z = \frac{(p_1 - p_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

公職王歷屆試題 (104 高普考)

$$\Rightarrow P(-Z_{0.025} \leq Z \leq Z_{0.025}) = 0.95$$

$$\Rightarrow P(-Z_{0.025} \leq \frac{(p_1 - p_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \leq Z_{0.025}) = 0.95$$

$\therefore p_1 - p_2$  的 95% 信賴區間估計為

$$(p_1 - p_2 - Z_{0.025} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}, p_1 - p_2 + Z_{0.025} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}})$$

$$\Rightarrow (0.25 - 0.5 - 1.96 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{80} + \frac{0.5 \times 0.5}{110}}, 0.25 - 0.5 + 1.96 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{80} + \frac{0.5 \times 0.5}{110}})$$

$$\Rightarrow (-0.3832, -0.1168)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

合併比例  $p = \frac{20+55}{80+110} = 0.3947$

因為  $n_1 = 80$ ,  $n_2 = 110$  為大樣本，利用 Z 檢定

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{Z | Z > 1.96 \text{ 或 } Z < -1.96\}$$

檢定統計量

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}}} = \frac{(0.25 - 0.5) - 0}{\sqrt{\frac{0.3947 \times 0.6053}{80} + \frac{0.3947 \times 0.6053}{110}}}$$

$$= -3.48 \in C \Rightarrow \text{Re } H_0$$

結論：有證據顯示  $p_1 \neq p_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \text{「部門別」與「工時型態」之偏好無關} \\ H_1 : \text{「部門別」與「工時型態」之偏好有關} \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{X^2 | X^2 > X_{0.05}^2(1) = 3.84146\}$$

部門別 \ 工時型態	行政管理	生產維修	合計
一週工作 40 小時	20 (31.58)	55 (43.42)	75
雙週工作 80 小時	60 (48.42)	55 (66.58)	115
合計	80	110	190

檢定統計量

$$X^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - \frac{1}{2})^2}{e_{ij}}$$

$$= \frac{(|20 - 31.58| - \frac{1}{2})^2}{31.58} + \frac{(|55 - 43.42| - \frac{1}{2})^2}{43.42} + \frac{(|60 - 48.42| - \frac{1}{2})^2}{48.42} + \frac{(|55 - 66.58| - \frac{1}{2})^2}{66.58}$$

$$= 11.0942 \in C \Rightarrow \text{Re } H_0$$

結論：有證據顯示「部門別」與「工時型態」之偏好有關。

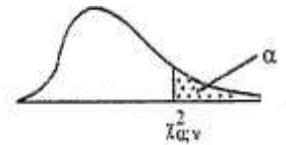
**t-table (right tail)**

For each row (degrees of freedom  $k$ ) and column (right tail probability  $\alpha$ ), the table entry  $e$  satisfies  $\Pr(t_k \geq e) = \alpha$ . Note that the  $t$ -distribution is symmetric about 0.

degrees of freedom	right tail probability				
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457
35	0.682	1.306	1.690	2.030	2.438
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423
45	0.680	1.301	1.679	2.014	2.412
50	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403
gaussian	0.675	1.282	1.646	1.962	2.330



**Table of the Chi-square Distribution**



$\alpha =$	0.995	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001	$=\alpha$
$v = 1$	0.0000393	0.000157	0.000628	0.000982	0.00393	0.0158	0.0642	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827	$v = 1$
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.103	0.211	0.446	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815	2
3	0.0717	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.268	3
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.465	4
5	0.412	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.517	5
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457	6
7	0.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.322	7
8	1.344	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.125	8
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877	9
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588	10
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264	11
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909	12
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	8.634	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	34.528	13
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.123	14
15	4.601	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	37.697	15
16	5.142	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252	16
17	5.697	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.790	17
18	6.265	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312	18
19	6.844	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.820	19
20	7.434	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	45.315	20
21	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.797	21
22	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268	22
23	9.260	10.196	11.293	11.688	13.091	14.848	17.187	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728	23
24	9.886	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558	51.179	24
25	10.520	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.620	25
26	11.160	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	54.052	26
27	11.808	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	32.912	36.741	40.113	43.194	44.140	46.963	49.645	55.476	27
28	12.461	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	56.893	28
29	13.121	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	58.302	29
30	13.787	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.703	30
40	20.706	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	32.345	47.269	51.805	55.759	59.342	60.436	63.691	66.766	73.402	40
50	27.991	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	41.449	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490	86.661	50
60	35.535	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	50.641	68.972	74.397	79.082	83.296	84.580	88.379	91.952	99.607	60
70	43.275	45.442	47.893	48.758	51.739	55.329	59.898	79.715	85.527	90.531	95.023	96.388	100.425	104.215	112.317	70
80	51.171	53.539	56.213	57.153	60.391	64.278	69.207	90.405	96.578	101.880	106.629	108.069	112.329	116.321	124.839	80
90	59.196	61.754	64.634	65.646	69.126	73.291	78.558	101.054	107.565	113.145	118.136	119.648	124.116	128.299	137.208	90
100	67.327	70.065	73.142	74.222	77.929	82.358	87.945	111.667	118.498	124.342	129.561	131.142	135.807	140.170	149.449	100