

106 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：四等考試

類 科：經建行政、交通技術

科 目：統計學概要

一、投擲兩個公正六面骰子一次，設隨機變數 X 為出現點數 2 的個數。請回答下列問題：

(一)寫出題目所述的實驗(experiment)的樣本空間(sample space)。(5 分)

(二)求隨機變數 X 的動差母函數(moment generating function)。(6 分)

(三)求機率 $P(X \geq 1)$ 。(3 分)

【擬答】

(一)樣本空間 $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6; x_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(二) $r.v.X$ 為出現點數 2 的個數

$$P(x=0) = \frac{5 \times 5}{36} = \frac{25}{36}$$

$$P(x=1) = \frac{5+5}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(x=2) = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow Mx(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} f(x)$$

$$= e^0 \times \frac{25}{36} + e^t \times \frac{5}{18} + e^{2t} \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{5}{18} e^t + \frac{1}{36} e^{2t}$$

$$(三) P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{5}{18} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

二、請回答下列問題：

(一)寫出樣本平均數與樣本變異數的計算公式。(8 分)

(二)寫出母體(population)平均數與母體變異數的定義及計算公式。(8 分)

(三)說明什麼狀況下，會以樣本平均數來替代(估計)母體平均數。(5 分)

【擬答】

(一)

$$1. \text{樣本平均數 } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$2. \text{樣本變異數 } S^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]$$

(二)

$$1. \text{母體平均數為所有資料在數線上的一個平衡的位置，其公式為 } \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

2. 母體變異數為離均差平方和再除以總個數，它是所有變異量數中最常用且最穩定的一

個，其公式為 $\sigma^2 = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \right]$

(三) 若欲計算母體的母數且須用到母體平均數時，但母體平均數未知，則可以利用樣本平均數來替代(估計)母體平均數

三、已知隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數為 $f(x, y) = \frac{1}{c} \cdot 0 \leq x \leq y \leq 2$ ，其中 c 為常數。

請回答下列問題：

(一) 求常數 c ，以滿足題目所述的 $f(x, y)$ 構成一機率密度函數。(6 分)

(二) 分別求 X 與 Y 的邊際密度函數， $f_x(x)$ 與 $f_y(y)$ 。(6 分)

(三) 求給定 $X=x$ 下， Y 的條件機率密度函數， $f_{Y|X}(y|x)$ 。(5 分)

(四) 求給定 $X=x$ 下， Y 的條件平均數與條件變異數， $\mu_{Y|X}$ 和 $\sigma_{Y|X}^2$ 。(6 分)

(五) 根據題(三)之結果，回答給定 $X=x$ 下， Y 的條件分配是何種分配？

(回答分配名稱及其參數。)(6 分)

【擬答】

(一) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

$\Rightarrow \int_0^2 \int_0^y \frac{1}{c} dx dy = 1 \Rightarrow c = 2$

(二) 1. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^2 \frac{1}{2} dy = \left[\frac{y}{2} \right]_x^2 = \frac{1}{2}(2-x), 0 \leq x \leq 2$

2. $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^y \frac{1}{2} dx = \left[\frac{x}{2} \right]_0^y = \frac{y}{2}, 0 \leq y \leq 2$

(三) $f_{Y|X}(x, y) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(2-x)} = \frac{1}{2-x}, 0 \leq x \leq y \leq 2$

(四) 1. $\mu_{Y|X} = E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dx$

$= \int_x^2 \frac{y}{2-x} dy = \frac{x+2}{2}, 0 \leq x \leq 2$

2. $E(Y^2|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y|x) dx$

$\int_x^2 \frac{y^2}{2-x} dy = \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)$

$\Rightarrow \sigma_{Y|X}^2 = \text{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2$

$$= \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 4) - \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = \frac{(2-x)^2}{12}, 0 \leq x \leq 2$$

(五) $Y|X=x \sim U(x,2)$, 其中 $0 \leq x \leq 2$

四、假設有組 50 筆的資料如下所示：

70 40 63 58 77 53 69 65 67 41 63 62 42 63 57 59 77 59 67 57
69 62 47 63 42 56 69 66 70 55 54 66 67 60 77 49 74 75 77 76
52 61 42 44 68 60 53 49 58 67 。

(不提供統計分配的百分位數值，依觀念可判斷是否棄卻假設。)

($z_{0.1} = -1.282, z_{0.2} = -0.8146, z_{0.25} = -0.6745$ 。)

請回答下列問題

(一)以卡方適合度檢定對此資料的分配檢定是否為常態分配，顯著水準為 0.05。(需包括虛無假設與對立假設、檢定統計量、計算過程、棄卻域(rejection region)與結論。)(分四組檢定即可)(20 分)

(二)檢定此組資料的平均數是 60，顯著水準為 0.1。(需包括虛無假設與對立假設、檢定統計量、計算過程、棄卻域與結論。)(16 分)

本試題可能使用之查表值如下：

1. X_n^2, α (具有自由度 n 之卡方分配右尾之機率為 α 的 X^2 值)：

$$X_{1,0.05}^2 = 3.841, X_{2,0.05}^2 = 5.991, X_{3,0.05}^2 = 7.815, X_{1,0.025}^2 = 5.024$$

$$X_{2,0.025}^2 = 7.378, X_{3,0.025}^2 = 9.348$$

2. $t_\alpha(n)$ (且有自由度 n 之 t 分配右尾之機率為 α 的 t 值)：

$$t_{0.1}(49) = 1.299, t_{0.1}(50) = 1.299, t_{0.05}(49) = 1.677, t_{0.05}(50) = 1.676。$$

【擬答】

$$\begin{cases} H_0: \text{資料符合常態分配} \\ H_1: \text{資料不符合常態分配} \end{cases}$$

$$\text{其中 } n=50, \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 60.74$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]} = 10.42$$

$$P(X < Q_1) = P\left(Z < \frac{Q_1 - 60.74}{10.42}\right) = 0.25$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1 - 60.74}{10.42} = -0.6745 \Rightarrow Q_1 = 53.71$$

$$P(X > Q_3) = P\left(Z > \frac{Q_3 - 60.74}{10.42}\right) = 0.25$$

$$\Rightarrow \frac{Q_3 - 60.74}{10.42} = 0.6745 \Rightarrow Q_3 = 67.77$$

	53.71 以下	53.71~60.74	60.74~67.77	67.77 以上
o_i	12	11	14	13
P_i	0.25	0.25	0.25	0.25
e_i	12.5	12.5	12.5	12.5

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{\chi^2 | \chi^2 > \chi^2_{0.05}(1) = 3.841\}$$

檢定統計量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(|o_i - e_i| - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}} = \frac{(|12 - 12.5| - \frac{1}{2})^2}{12.5} + \dots + \frac{(|13 - 12.5| - \frac{1}{2})^2}{12.5}$$

$$= 0.16 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示資料不符合常態分配

$$(\Rightarrow) \begin{cases} H_0: \mu = 60 \\ H_1: \mu \neq 60 \end{cases}$$

由(一)得母體為常態，且 σ^2 未知 $\Rightarrow$ 利用 t 檢定

$$\alpha = 0.1 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{t | t > t_{0.05}(49) \text{ 或 } t < -t_{0.05}(49)\}$$

$$\{t | t > 1.677 \text{ 或 } t < -1.677\}$$

$$\text{檢定統計量 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{60.74 - 60}{\frac{10.42}{\sqrt{50}}} = 0.502 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示此組資料的平均數不為 60