

## 105 年公務人員普通考試試題

類科：經建行政、交通技術

科目：統計學概要

一、某大學計學系之大一統計學課程，依學生高中時期之數學程度分成甲、乙兩班，甲班學生 40 人，其統計學期末考試之平均成績為 35 分，標準差為 5 分；乙班學生 60 人，其平均成績為 80 分，標準差為 4 分。

(一)試問兩班全體學生統計學期末考試之平均成績為多少分？(6 分)

(二)甲班學生之考試成績頗不理想，故老師決定每位學生之成績均「乘以 2 後再減 5 分」，試問經調整分數後，該班學生成績之平均數及標準差分別為何？(8 分)

(三)乙班學生中有 1 人夾帶小抄舞弊，其成績為 60 分，經開會決議應以 0 分計算，試問乙班統計學期末考試成績之平均數標及標準差應修正為多少分？(6 分)

【擬答】：

$$(一) \bar{x} = \frac{35 \times 40 + 80 \times 60}{40 + 60} = 62$$

(二)設調整後成績為  $Y \Rightarrow Y = 2x - 5$

$$1. \bar{Y} = 2\bar{X} - 5 = 2 \times 35 - 5 = 65$$

$$2. S_Y = 2S_x = 2 \times 5 = 10$$

(三)

$$1. \bar{x} = \frac{80 \times 60 - 60}{60} = 79$$

$$2. \text{調整前 } \sum_{i=1}^n X_i^2 = 16 \times 60 + 60 \times 80^2 = 384960$$

$$\text{調整後 } \sum_{i=1}^n X_i^2 = 384960 - 60^2 = 381360$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right] = \frac{1}{60} [381360 - 60 \times 79^2]$$

$$= 115$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{115} = 10.72$$

二、5 位某校統計系大一學生之微積分成績 (X) 及統計學成績 (Y) 如下表所示：

x	30	68	24	31	49
y	63	80	58	64	71

今已求得： $\sum x = 202$ ， $\sum y = 336$ ， $\sum x^2 = 9,462$ ， $\sum y^2 = 22,870$ ， $\sum xy = 14,185$ 。

(一)試求微積分成績及統計學成績之相關係數。(6 分)

(二)今擬以微積分成績推估統計學成績，試據相關資料配一迴歸直線。(8 分)

(三)試求微積分成績及統計學成績之 Spearman 等級相關係數 (Spearman's rank correlation coefficient)。(6 分)

【擬答】：

$$(\rightarrow) r = \frac{\sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{n}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}} \sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}}} = \frac{14185 - \frac{202 \times 336}{5}}{\sqrt{9462 - \frac{202^2}{5}} \sqrt{22870 - \frac{336^2}{5}}} = 0.9926$$

$$(\rightarrow) \hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

$$1. \hat{\beta} = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{14185 - \frac{202 \times 336}{5}}{9462 - \frac{202^2}{5}} = 0.4693$$

$$2. \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = \frac{336}{5} - 0.4693 \times \frac{202}{5} = 48.24028$$

$$\Rightarrow \hat{Y} = 48.24028 + 0.4693X$$

(三)

X	30(4)	68(1)	24(5)	31(3)	49(2)
Y	63(4)	80(1)	58(5)	64(3)	71(2)
$d = X - Y$	0	0	0	0	0

$$\rho_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{N(N^2 - 1)}, \text{ 其中 } d_i^2 = 0$$

$$\therefore \rho_s = 1 - 0 = 1$$

三、設有兩袋，第 I 袋中裝有 3 紅球 (R)，2 白球 (W)，1 藍球 (B)；第 II 袋中裝有 4 白球，2 藍球。今擬自袋子中以不放回方式摸取 2 球。試問：

(一)自第 I 袋中摸出 2 白球之機率為何？(5 分)

(二)自第 II 袋中摸出 2 白球之機率為何？(5 分)

(三)若擲一正常骰子，出現 1 點或 6 點，則自第 I 袋中以不放回方式摸出 2 球，否則自第 II 袋中以相同方式摸出 2 球。今若所摸出之 2 球皆為白球，試問它係摸自第 I 袋之機率為何？

(10 分)

【擬答】：

$$(\rightarrow) p = \frac{c_2^2}{c_2^6} = \frac{1}{15}$$

$$(\rightarrow) p = \frac{c_2^4}{c_2^6} = \frac{2}{5}$$

$$(\rightarrow) P(\text{第 I 袋} | 2 \text{ 白球}) = \frac{P(\text{第 I 袋} \cap 2 \text{ 白球})}{P(2 \text{ 白球})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{15}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}} = \frac{1}{13}$$

公職王歷屆試題 (105 普考)

四、三種品種之馬鈴薯各以面積相等之田地若干塊作種植實驗，一段時間後收穫之產量（單位：公噸）如下表所示：

品種	$X_{ij}$			
A	23	20	24	25
B	23	20	17	26
C	20	17	16	21

(一)若欲對三種品種生產能力是否將相同，而進行變異數分析，則對品種之收穫量有何基本之假設？(6分)

(二)求進變異數分析時之總平方和 (Total sum of squares) SST 及處理平方和 (Treatment sum of squares) SSTR。(8分)

(三)試在  $\alpha=0.05$  的顯著水準下，檢定三種品種生產力相同之假設是否成立？(6分)

【擬答】：

- (一)
1. 常態性 (Normality)：在 ANOVA 時所抽樣的所來自的母群體為常態分配。通常不需要特別去檢定母體的常態性，除非有很明顯的證據證明母體不為常態分配。
  2. 變異數同質性 (Homogeneity of Variance)：在做 ANOVA 時須假設 K 個母體的變異相同。
  3. 獨立性 (Independence)：在做 ANOVA 時，所有隨機樣本彼此之間均獨立。

(二)

品種	$X_{ij}$				和
A	23	20	24	25	$T_{1\cdot} = 92$
B	23	20	17	26	$T_{2\cdot} = 86$
C	20	17	16	21	$T_{3\cdot} = 74$

$$T_{..} = 252, \sum \sum X_{ij}^2 = 5140, K = 3, N = 12$$

$$1. SST = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} = 5140 - \frac{252^2}{12} = 118$$

$$2. SSTR = \sum_{i=1}^K \frac{T_{i\cdot}^2}{n_i} - \frac{T_{..}^2}{N} = \left[ \frac{92^2}{4} + \frac{86^2}{4} + \frac{74^2}{4} \right] - \frac{252^2}{12} = 42$$

(三)

$$\begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C \\ H_1: \mu_i \text{ 不全相同, } i = A, B, C \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \text{拒絕域 } c = \{F | F > F_{0.05}(2, 9) = 4.2565\}$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{42}{\frac{76}{9}} = 2.4868 \notin c \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示三種品種生產能力有顯著的差異。

公職王歷屆試題 (105 普考)

五、某農業試驗場對同種作物分別施以 A 肥料及 B 肥料，其各 5 塊實驗田之收穫量相關資料如下（單位相同），今假設兩種肥料之收穫量服從常態分配，並具相同之變異數。

$$A \text{ 肥料: } \bar{x}_A = 34, s_A^2 = \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2}{n_A - 1} = 6$$

B 肥料: 32 34 30 34 30

(一)試求施以 A 肥料之所有該作物平均收穫量的 95% 信賴區間。(10 分)

(二)試在  $\alpha = 0.05$  的顯著水準下，檢定施以兩種肥料之所有該作物的平均收穫量是否有差異？(10 分)

【擬答】：

(一)母體為常態，且  $\sigma^2$  未知， $n=5$ ，利用 t 分配

$$\Rightarrow \text{樞紐量 } t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

$$\Rightarrow P(-t_{0.025}(4) \leq t \leq t_{0.025}(4)) = 0.95$$

$$\Rightarrow P(-t_{0.025}(4) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq t_{0.025}(4)) = 0.95$$

$\therefore \mu_A$  信賴度 95% 之信賴區間為

$$\left( \bar{X} - t_{0.025}(4) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{0.025}(4) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\Rightarrow \left( 34 - 2.776 \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, 34 + 2.776 \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\Rightarrow (30.9590, 37.0410)$$

$$(二) \begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_B \\ H_1: \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

母體為常態，變異數未知，且  $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$

$$\Rightarrow \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = Sp^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

$$= \frac{(5-1) \times 6 + (5-1) \times 4}{5+5-2} = 5$$

$$\text{其中 } \bar{X}_B = \frac{32 + 34 + 30 + 34 + 30}{5} = 32$$

$$S_B^2 = \frac{\sum (X - \bar{X}_B)^2}{n_B - 1} = 4$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{ |t| > t_{0.025}(8) \text{ 或 } t < -t_{0.025}(8) \}$$

$$= \{ |t| > 2.306 \text{ 或 } t < -2.306 \}$$

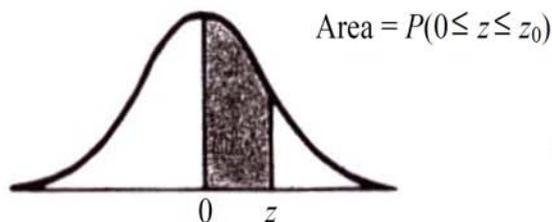
檢定統計量

$$t = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{Sp^2}{n_A} + \frac{Sp^2}{n_B}}} = \frac{(34 - 32) - 0}{\sqrt{\frac{5}{5} + \frac{5}{5}}} = 1.414 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示兩種肥料之所有該作物的平均收穫量有顯著差異。

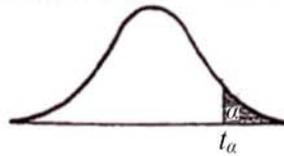
## 參考數值表摘錄

標準常態分配數值表



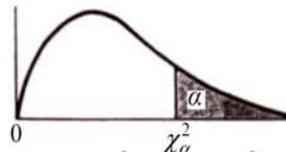
$z_0$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974

t 分配數值表



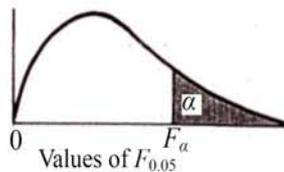
Degrees of Freedom	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250

$\chi^2$  分配數值表



d.f.	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.9}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$	d.f.
1	.000393	.00157	.000982	.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1	
2	.0100	.0201	.0506	.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2	
3	.0717	.115	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3	
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4	
5	.412	.554	.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750	5	

F 分配數值表



Degrees of freedom for denominator	Degrees of freedom for numerator																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21