

## 105 年公務人員普通考試試題

類科：統計

科目：統計學概要

一、設隨機變數  $X$  的機率分配為

x	0	1
f(x)	0.4	0.6

隨機變數  $Y$  的機率分配為

y	1	2	3
f(y)	0.25	0.5	0.25

今已知  $P(X = 1|Y = 1) = 0.6$ ,  $P(X = 0|Y = 2) = 0.4$  則：(一)試求隨機變數  $X$  與  $Y$  之聯合機率分配  $f_{X,Y}(x, y)$  為何? (6 分)(二)試求  $P(X+Y \leq 2) = ?$  (6 分)(三)試求隨機變數  $X$  與  $Y$  的相關係數  $\rho_{X,Y} = ?$  (6 分)(四)試求隨機變數  $X$  與  $Y$  是否獨立?請說明之。(6 分)

【擬答】：

(一) $X, Y$  聯合機率分配為

	Y	1	2	3	f(x)
X					
	0	0.1	0.2	0.1	0.4
	1	0.15	0.3	0.15	0.6
	f(y)	0.25	0.5	0.25	1

(二) $p(x+y \leq 2) = p(X=0, Y=1) + p(X=0, Y=2) + p(X=1, Y=1)$   
 $= 0.1 + 0.2 + 0.15 = 0.45$ (三) $E(x) = \sum Xf(x) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.6 = 0.6$ 

$$E(x^2) = \sum X^2 f(x) = 0^2 \times 0.4 + 1^2 \times 0.6 = 0.6$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.6 - 0.6^2 = 0.24$$

$$E(Y) = \sum yf(y) = 1 \times 0.25 + 2 \times 0.5 + 3 \times 0.25 = 2$$

$$E(Y^2) = \sum y^2 f(y) = 1^2 \times 0.25 + 2^2 \times 0.5 + 3^2 \times 0.25 = 4.5$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 4.5 - 2^2 = 0.5$$

$$E(XY) = \sum \sum xyf(x, y) = 0 \times 1 \times 0.1 + \dots + 1 \times 3 \times 0.15 = 1.2$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.2 - 0.6 \times 2 = 0$$

$$\therefore \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sqrt{0.24} \sqrt{0.5}} = 0$$

(四)由聯合機率得  $f(x, y) = f(x)f(y)$  $\therefore X, Y$  為獨立的隨機變數。

二、臺北第一超市欲向梨山向陽蘋果園採購 1000 箱蘋果，向陽蘋果園出產之蘋果重量(個)為一常態分配，其平均重量為 360 公克，標準差為 30 公克。今臺北第一超市派出採購部王經理，進行蘋果品質抽樣檢驗工作。試問：

(一)王經理自向陽蘋果園隨機抽取一個蘋果，則該顆蘋果重量少於 330 公克的機率為何? (8 分)

(二)若向陽蘋果園以 50 個蘋果裝成一箱裝運，王經理自該園隨機抽取一箱檢驗，則該箱蘋果的重量在  $18 \pm 0.5$  公斤的機率為何? (8 分)

【擬答】：

(一) $X \sim N(\mu = 360, \sigma^2 = 900)$

$$p(x < 330) = p\left(z < \frac{330 - 360}{30}\right) = p(z < -1) = 0.1587$$

(二)  $(x_1, x_2, \dots, x_{50}) \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu = 360, \sigma^2 = 900)$

$$\sum_{i=1}^{50} x_i \sim N(\mu = 18000, \sigma^2 = 45000)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i - 18000}{\sqrt{45000}} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow p\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow p\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 18000}{\sqrt{45000}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$\Rightarrow$  一箱蘋果的重量信賴度  $1 - \alpha$  之信賴區間為

$$\left(18000 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{45000}, 18000 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{45000}\right)$$

$$\Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{45000} = 500 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.357$$

$$\Rightarrow p(z < 2.537) \div 0.9908 \text{ (由查表)}$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 0.9816$$

所以該箱蘋果的重量在  $18 \pm 0.5$  公斤的機率為 0.9816

三、設  $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$  為抽自母體變異數為 100，平均數  $\mu$  為未知的常態分配之一組大小為  $n = 100$  之隨機樣本，今欲利用此組隨機樣本來檢定  $H_0: \mu = 75$  對  $H_1: \mu = 78$ ，且訂定檢定規則 (危險域) 為  $C = \{\bar{X} \geq k\}$ ，則：

(一) 若取顯著水準為  $\alpha = 0.025$ ，試決定上述檢定規則 (危險域)  $C$  中之常數  $k$  之值為何? (8 分)

(二) 試求上述 (一) 中所訂定之檢定規則  $C$  的檢定力 (power) 為何? (8 分)

(三) 試求上述 (一) 中所訂定之檢定規則  $C$  會產生多大的型二誤差 (type II error) 之機率，即  $\beta = ?$  (8 分)

【擬答】：

$$(一) \alpha = p(\text{Re}H_0 | H_0 \text{ 為真}) = p(\bar{X} \geq k | \mu = 75)$$

$$= p\left(Z > \frac{k - 75}{\frac{10}{\sqrt{100}}}\right) = 0.025$$

$$\text{由查表得 } \frac{k - 75}{\frac{10}{\sqrt{100}}} = 1.96 \Rightarrow k = 76.96$$

$$(二) \text{power} = 1 - \beta = p(\text{Re}H_0 | H_0 \text{ 為假})$$

$$= p(\bar{X} > 76.96 | \mu = 78) = p\left(Z > \frac{76.96 - 78}{\frac{10}{\sqrt{100}}}\right) = p(Z > -1.04) = 0.8508$$

公職王歷屆試題 (105 普考)

$$\begin{aligned} \text{(三)} \beta &= p(\text{ACh}_0 | H_0 \text{ 為假}) = p(\bar{x} < 76.94 | \mu = 78) \\ &= p\left(z < \frac{76.96 - 78}{\frac{10}{\sqrt{100}}}\right) = p(z < -1.04) = 0.1492 \end{aligned}$$

四、以下是一項調查 1000 位學生，有關學生是否有吸菸習慣與其父母吸不吸菸的調查研究，得資料如下：

	父母皆吸菸	父或母親吸菸	父母皆不吸菸
學生不吸菸	150	300	450
學生吸菸	20	30	50

(一)試以顯著水準  $\alpha = 0.05$  之下，檢定學生是否吸菸與其父母吸不吸菸間是否有關？請寫出相關檢定的所有步驟與最後檢定之結果。(10 分)

(二)請說明你(妳)所用的統計檢定方法其名稱為何？(6 分)

【擬答】：

	父母皆吸菸	父或母親吸菸	父母皆不吸菸	和
學生不吸菸	150 (153)	300 (297)	450 (450)	900
學生吸菸	20 (17)	30 (33)	50 (50)	100
和	170	330	500	1000

$\begin{cases} H_0: \text{學生是否吸菸與其父母吸不吸菸無關} \\ H_1: \text{學生是否吸菸與其父母吸不吸菸有關} \end{cases}$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \text{拒絕域 } c = \{X^2 | X^2 > X_{0.05}^2(2) = 5.99147\}$$

檢定統計量

$$X^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(150 - 153)^2}{153} + \dots + \frac{(50 - 50)^2}{50} = 0.8913 \notin c \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示學生是否吸菸與其父母吸不吸菸有關。

(二)此題利用卡方獨立性檢定

五、已知自三個具有相同變異數  $\sigma^2$  之常態母體，分別獨立的隨機抽出樣本，經整理得樣本資料訊息如下表所示：

母體	樣本數( $n_i$ )	平均數( $\bar{x}_i$ )	變異數( $s_i^2$ )
1	3	13	25
2	5	14	16
3	7	15	9

(一)試依此資料訊息，取顯著水準  $\alpha = 0.05$ ，檢定比三個母體的平均數是否全相等？假設此資料適合做變異數分析。(註：參考統計值  $F_{0.05}(2, 12) = 3.89$ ， $F_{0.05}(3, 12) = 3.49$ )(12 分)

(二)變異數  $\sigma^2$  的估計值為何？(8 分)

【擬答】：

公職王歷屆試題 (105 普考)

$$(\text{一}) \begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1 : \mu_i \text{ 不全相同}, i=1,2,3 \end{cases}$$

$$SST = SSTR + SSE$$

$$\bar{X}_{..} = \frac{13 \times 3 + 14 \times 5 + 15 \times 7}{3 + 5 + 7} = \frac{214}{15}$$

$$1. SSTR = \sum_{i=1}^K n_i (\bar{X}_i - \bar{X}_{..})^2$$

$$= 3(13 - \frac{214}{15})^2 + 5(14 - \frac{214}{15})^2 + 7(15 - \frac{214}{15})^2 = 8.93$$

$$2. SSE = \sum_{i=1}^K (n_i - 1) S_i^2 = (3-1) \times 25 + (5-1) \times 16 + (7-1) \times 9 = 168$$

$$3. SST = SSTR + SSE = 176.93$$

來源	SS	df	MS	F 值
組間	8.93	2	4.465	F=0.3189
組內	168	12	14	
總變異	176.93	14		

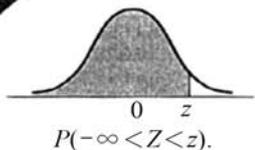
$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \text{拒絕域 } c = \{F | F > F_{0.05}(2, 12) = 3.89\}$$

$$F = 0.3189 < 3.89 \notin c \Rightarrow \text{not Re}H_0$$

結論：沒有證據顯示三個母體平均數不全相同。

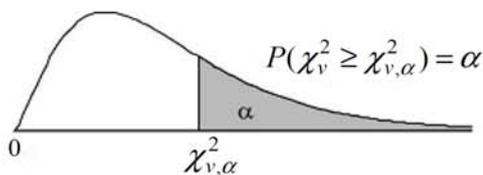
(二) 因為  $E(MSE) = \sigma^2$ , 則  $\sigma^2$  的估計值為  $MSE = 14$

附表1：標準常態累加機率值表



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

附表 2：卡方分配臨界值表



v	α									
	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	7.8794	6.6349	5.0239	3.8415	2.7055	0.0158	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000
2	10.5966	9.2103	7.3778	5.9915	4.6052	0.2107	0.1026	0.0506	0.0201	0.0100
3	12.8382	11.3449	9.3484	7.8147	6.2514	0.5844	0.3518	0.2158	0.1148	0.0717
4	14.8603	13.2767	11.1433	9.4877	7.7794	1.0636	0.7107	0.4844	0.2971	0.2070
5	16.7496	15.0863	12.8325	11.0705	9.2364	1.6103	1.1455	0.8312	0.5543	0.4117
6	18.5476	16.8119	14.4494	12.5916	10.6446	2.2041	1.6354	1.2373	0.8721	0.6757
7	20.2777	18.4753	16.0128	14.0671	12.0170	2.8331	2.1673	1.6899	1.2390	0.9893
8	21.9550	20.0902	17.5345	15.5073	13.3616	3.4895	2.7326	2.1797	1.6465	1.3444
9	23.5894	21.6660	19.0228	16.9190	14.6837	4.1682	3.3251	2.7004	2.0879	1.7349
10	25.1882	23.2093	20.4832	18.3070	15.9872	4.8652	3.9403	3.2470	2.5582	2.1559