104 年公務人員特種考試身心障礙人員考試試題

考 試 別： 身心障礙人員考試
等 別： 三等考試
類 科： 電力工程
科 目： 工程數學

甲、申論題部分：（50 分）

一、試利用拉氏轉換（Laplace transform）求解：（10 分）

$$y''+5y'+6y=\begin{cases}-2, & 0\le t<3\\ 0, & t\ge 3\end{cases};y(0)=y'(0)=0,\text{其中}y'\equiv\frac{dy}{dt},y''=\frac{d^2y}{dt^2}\text{。}$$

【擬答】：

$$L\{y''\}=S^2Y(S)-Sy(0)-y'(0)=S^2Y(S)$$

$$L\{y'\}=SY(S)-y(0)=SY(S)$$

$$L\{y\}=Y(S)$$

$$\Rightarrow L\{y''+5y'+6y\}=\int_0^3-2e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow S^2Y(S)+5SY(S)+6Y(S)=\frac{2}{S}e^{-st}\Big|_0^3=\frac{2}{S}e^{-3S}-\frac{2}{S}$$

$$\Rightarrow (S^2+5S+6)Y(S)=\frac{2}{S}e^{-3S}-\frac{2}{S}$$

$$\Rightarrow Y(S)=\frac{2}{S(S+2)(S+3)}e^{-3S}-\frac{2}{S(S+2)(S+3)}=\left(\frac{\frac{1}{3}}{S}+\frac{-1}{S+2}+\frac{\frac{2}{3}}{S+3}\right)e^{-3S}-\left(\frac{\frac{1}{3}}{S}+\frac{-1}{S+2}+\frac{\frac{2}{3}}{S+3}\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\{Y(S)\}=\left[\frac{1}{3}-e^{-2(t-3)}+\frac{2}{3}e^{-3(t-3)}\right]u(t-3)-\left[\frac{1}{3}-e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-3t}\right]$$

二、考慮下列之動態系統：（每小題 5 分，共 10 分）

$$x(k+1)=Ax(k),\text{其中}A=\begin{bmatrix}0 & 0.95 & 0.6\\ 0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

㈠試建構矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之一組特徵基底（eigenbasis）。

㈡若 $x(0)=\begin{bmatrix}1250\\ 600\\ 400\end{bmatrix}$，試求其穩態值，即 $\lim\limits_{k\to\infty}x(k)=?$

【擬答】：

㈠ $\det(A-\lambda I)=0$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-\lambda & 0.95 & 0.6\\ 0.8 & -\lambda & 0\\ 0 & 0.5 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1,-0.4,-0.6$$

1.

$$\lambda=1\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&0.95&0.6\\0.8&-1&0\\0&0.5&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X1\\X2\\X3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}X1\\X2\\X3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}5\\4\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V(1)=Span\left\{\begin{bmatrix}5\\4\\2\end{bmatrix}\right\}$$

2.

$$\lambda=-0.4\Rightarrow\begin{bmatrix}0.4&0.95&0.6\\0.8&0.4&0\\0&0.5&0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X1\\X2\\X3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}X1\\X2\\X3\end{bmatrix}=K_2\begin{bmatrix}2\\-4\\5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V(-0.4)=span\left\{\begin{bmatrix}2\\-4\\5\end{bmatrix}\right\}$$

3.

$$\lambda=-0.6\Rightarrow\begin{bmatrix}0.6&0.95&0.6\\0.8&0.6&0\\0&0.5&0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X1\\X2\\X3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}X1\\X2\\X3\end{bmatrix}=k_3\begin{bmatrix}9\\-12\\10\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V(-0.6)=span\left\{\begin{bmatrix}9\\-12\\10\end{bmatrix}\right\}$$

(二)

設：$p=\begin{bmatrix}5&2&9\\4&-4&-12\\2&5&10\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-0.4&0\\0&0&-0.6\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}AP=D\Rightarrow A=PDP^{-1}=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-0.4&0\\0&0&-0.6\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^K=P\begin{bmatrix}1^K&0&0\\0&(-0.4)^K&0\\0&0&(-0.6)^K\end{bmatrix}P^{-1}$$

且$P^{-1}=\dfrac{1}{224}\begin{bmatrix}20&25&12\\-64&32&96\\28&-21&-28\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\lim_{k\to\infty}X(K)=\lim_{k\to\infty}A^KX(0)=\lim_{k\to\infty}P\begin{bmatrix}1^K&0&0\\0&(-0.4)^K&0\\0&0&(-0.6)^K\end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix}1250\\600\\400\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&2&9\\4&-4&-12\\2&5&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{224}\begin{bmatrix}20&25&12\\-64&32&96\\28&-21&-28\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1250\\600\\400\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1000\\800\\400\end{bmatrix}$$

三、隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\lambda^3 e^{-\lambda x}, 0\le y<x\\ 0, \quad 其他\end{cases},$$ 試求：（每小題 5 分，共 15 分）

(一)邊際機率密度函數（marginal probability density function） $f_X(x)=?$

(二) $f_{Y/X}(y/x)=?$

(三)機率 $P(Y\le 0.1|X=0.5)$為何？

【擬答】：

(一)

$$f(x)=\int_0^x \lambda^3 e^{-\lambda x}dy=\left[\lambda^3 e^{-\lambda x}y\right]\Big|_{y=0}^{y=x}$$

$$=\lambda^3 x e^{-\lambda x}, x\ge 0$$

(二)

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\lambda^3 e^{-\lambda x}}{\lambda^3 x e^{-\lambda x}}=\frac{1}{x}, 0\le y<x$$

(三)

$$f(y|x=0.5)=2, 0\le y\le 0.5$$

$$\Rightarrow P(Y\le 0.1|x=0.5)=\int_0^{0.1}2dy=[2y]\Big|_{y=0}^{y=0.1}=0.2$$

四、施力 $\bar{F}=3y\bar{i}+3x\bar{j}+2z\bar{k}$ 沿著路徑 C 由點 P(1,2,3)出發，作用至點 Q(2,－1,4)為止，其中路徑 C 為連接 P 點與 Q 點的直線。（每小題 5 分，共 15 分）

(一)列出路徑 C 之參數表示式（parametric representation）$\bar{r}$ (t) 。

(二)依上述之參數表示式，算出施力 $\bar{F}$ 於路徑 C 中所作的功（work）：$W=\int_C^F \bar{F}\cdot d\bar{r}$ 。

(三)已知此向量 $\bar{F}$ 可以用「純量 f (x,y,z)的梯度（gradient）」表示之，試找出 f (x,y,z)。

【擬答】：

(一)

$$C:\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{-1-2}=\frac{z-3}{4-3}=t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=t+1\\ y=-3t+2\\ z=t+3\end{cases}, \quad 0\le t\le 1$$

$$\Rightarrow \bar{r}(t)=(t+1)\bar{i}+(-3t+2)\bar{j}+(t+3)\bar{K}$$

(二)

$$
\begin{aligned}
w &= \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_c 3ydx + 3xdy + 2zdz \\
&= \int_0^1 \left[3(-3t+2)dx + 3(t+1)(-3dt) + 2(t+3)dt\right] \\
&= \int_0^1 (-16+3)dt = \left[-8t^2+3t\right]\Big|_0^1 = -8+3 = -5
\end{aligned}
$$

(三)

$$\vec{F} = 3y\vec{i} + 3x\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y \Rightarrow f(x,y,z) = 3xy + C_1(y,z) \\
\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x \Rightarrow f(x,y,z) = 3xy + C_2(x,z) \\
\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2z \Rightarrow f(x,y,z) = z^2 + C_3(x,y)
\end{cases}
$$

$$\therefore f(x,y,z) = 3xy + z^2 = C$$

乙、測驗題部分：（50 分）

(C) 1. 令 **F**，**G**，**H** 為向量，α，β 為常數，則下列敘述何者錯誤？

(A) **F**+**G** = **G**+**F**　(B)(**F**+**G**)+**H** = **F**+(**G**+**H**)

(C) **F**×**G** = **G**×**F**　(D)(αβ)**F** = α(β**F**)

(B) 2. 向量場 **F**=xy**i**+(zx-sin(y))**j**+yz**k** 在點 *P*=(－1, 0, 1)的散度（divergence）為何？

(A) $-\sqrt{2}$　(B)－1　(C) 1　(D) $\sqrt{10}/3$

(D) 3. 若 **A** 為一向量，*f* 為一純量，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$　(B) $\nabla\times(\nabla f)=0$

(C) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot\nabla f$　(D) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = \mathbf{A}\times\nabla f + f\nabla\times\mathbf{A}$

(C) 4. **F** 為一曲線之位置函數。若 **F** 為二次可微分，則其曲度（curvature）可寫成：

(A) $\dfrac{\|F'\times F''\|}{\|F'\|}$　(B) $\dfrac{\|F'\times F''\|}{\|F'\|^2}$

(C) $\dfrac{\|F'\times F''\|}{\|F'\|^3}$　(D) $\dfrac{\|F'\times F''\|}{\|F'\|^{3/2}}$

(B) 5. 已知 $A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -10 & 6\end{bmatrix}, f(x)=x^3-2x^2+x+1$，求行列式 $|f(\mathbf{A})|$ 之值為何？

(A) 1　(B) 3　(C) 4　(D) 6

(B) 6. 若矩陣 **A** 的特徵值（eigenvalue）為 1, －1, 1，且 **I** 代表單位矩陣，則(2**A**+**I**)**A**(**A**+2**I**)特徵值為何？

(A) 8, 2, 8　(B) 9, 1, 9　(C) 7, －1, 10　(D) 1, －1, 1

(D) 7. 下列敘述何者正確？

(A) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 可以被對角化

(B)令 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$，則 **A** 對應 **x** 的特徵值為 1

(C)令 $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，則 **A** 的特徵值為 4, 2,－ 2

(D)令 $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，則 **A** 的特徵值為 4, － 2 ,－ 2

(A) 8. 級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$ 之收斂半徑 R 之值為何？（其中 $i=\sqrt{-1}$ ）

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) 4

(B) 9. 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z+2|=3$，試求積分 $\int_c \frac{1}{(z+4)z^3}dz$ 為何？

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) 0　(C) 1　(D) $\frac{\pi i}{32}$

(D) 10. 已知複數數列 $\{z_n\}$ 及 $\{\hat{z}_n\}$ 皆為收斂，且其極限值（limits）分別為 c 及 $\hat{c}$，則下列敘述何者錯誤？

(A) 數列 $\{z_n+\hat{z}_n\}$ 為收斂，且其極限值為 $c+\hat{c}$

(B)數列 $\{z_n\hat{z}_n\}$ 為收斂，且其極限值為 $c\hat{c}$

(C)若 $\{z_n\}=\left\{k\hat{z}_n\right\}$，則 $c=k\hat{c}$，其中 k 為任意實數

(D)若 $c=\hat{c}$，則 $\{z_n\}=\{\hat{z}_n\}$

(C) 11. 若 $y=ax^m+bx^n$ 為 $x^2y''+2xy'-6y=0$ 之解，且 $m\neq n$，則 $m+n$ 之值為何？其中 a, b, m, n 為常數，$y'\equiv\frac{dy}{dx}, y''\equiv\frac{d^2y}{dx^2}$。

(A)–6　(B)–2　(C)–1　(D) 1

(C) 12. $\frac{dy}{dx}=e^y+\sin x, y(0)=0$。以 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 解之，則 $\sum_{n=0}^{2}a_n=?$

(A) 1　(B) $\frac{3}{2}$　(C) 2　(D) $\frac{5}{2}$

(B) 13. 下列何者為微分方程式 $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{9})y=0$ 的解？其中 C_1 及 C_2 為任意常數，$J_v(x)$及 $Y_v(x)$ 分別為第一類型及第二類型之 v 階 Bessel 函數。

(A) $C_1J_1(\frac{x}{3})+C_2Y_1(\frac{x}{3})$　(B) $C_1J_{\frac{1}{3}}(x)+C_2Y_{\frac{1}{3}}(x)$

(C) $C_1J_1(x-\frac{1}{3})+C_2Y_1(x-\frac{1}{3})$　(D) $C_1J_{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{3})+C_2Y_{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{3})$

(C) 14. $f(t)=3t^2+e^{-t}-\int_0^t f(\alpha)e^{t-\alpha}d\alpha$, 則 $f(t)=?$

(A) $t^3+2t^2-e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$　(B) $t^3+3t^2+e^{-t}-2te^{-t}$

(C) $-t^3+3t^2+1-2e^{-t}$　(D) $-t^3+2e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$

(A) 15. 令 $F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)^2}$，而 $f(t)=L^{-1}(F(s))$，則 $\lim_{t\to\infty}f(t)$ 之值為何？

(A) 0　(B) $\frac{1}{18}$　(C) 1　(D) ∞

(B) 16. 下列何者為線性微分方程式？

(A) $x^2y'' + e^y = 2x$　(B) $x^2y'' + 2xy' + y = e^x$

(C) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$　(D) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + xy = 4$

(B) 17. 4 個家庭，每個家庭皆有 3 個小孩，試求至少有 3 個家庭剛好擁有 2 個女孩之機率為何？（假設小孩是男孩或女孩的機率各為$\frac{1}{2}$）

(A) $\frac{135}{1024}$　(B) $\frac{621}{4096}$　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\frac{3}{8}$

(C) 18. 二枚錢幣投擲出現正面之機率分別為$\frac{1}{3}$及$\frac{1}{5}$，若隨機選擇出一枚錢幣並投擲二次，試求二次皆出現正面之機率為何？

(A) $\frac{1}{30}$　(B) $\frac{1}{15}$　(C) $\frac{17}{225}$　(D) $\frac{4}{15}$

(C) 19. 一容器中有 10 顆完全一樣的球分別標示為 $0, 1, 2, \cdots, 9$，隨機從容器中取出一顆球並記下其標示之號碼，該號碼為奇數或 3 的倍數之機率為何？

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{3}{5}$　(D) $\frac{4}{5}$

(D) 20. 令隨機變數 X 的累積分布為 $F(x) = \begin{cases} 0, 當 x < 0 \\ 2/7, 當 0 \le x < 1 \\ 6/7, 當 1 \le x < 2 \\ 1, 當 2 \le x \end{cases}$，請問下列敘述何者錯誤？

(A) $P(0 < x \le 2) = 5/7$　(B) $P(X = 1) = 4/7$

(C) $P(X \le 0) = 2/7$　(D) $P(X \le 1) = 2/7$