103年公務人員特種考試外交領事人員及外交行政人員、國際經濟商務人員、民航人員及原住民族考試試題

考 試 別：原住民族特考
等 別：四等考試
類 科 組：經建行政
科 目：統計學概要

一、某組樣本資料如下：

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

㈠試求這組樣本的相關係數 r。（10 分）

㈡實際上這組資料滿足 $y = x^2$ 的關係式，試說明 中所求得的相關係數 r 何以不等於 1 ？（5 分）

【擬答】

㈠ $\sum_{i=1}^{n} x_i = (-3)+(-2)+.....+3=0$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} = (-3)^2+(-2)^2+.....+3^2=28$

$\sum_{i=1}^{n} y_i = 9+4+.....+9=28$

$\sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2} = 9^2+4^2+.....+9^2=196$

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (-3)\times 9+(-2)\times 4+.....+3\times 9=0$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}}} = \frac{0-\frac{0\times 28}{7}}{\sqrt{28-\frac{0^2}{7}}\sqrt{196-\frac{28^2}{7}}} = 0$$

㈡㈠中的相關係數是求 x, y 二者的線性關係，但資料顯示滿足 $y = x^2$ 為非線性關係，所以相關係數為 0，不為 1。

二、令 A、B為兩事件，$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B)=\frac{7}{12}$

㈠若 A、B 為獨立事件，試求 $P(B)$及$P(B|A)$。（10 分）

㈡若 A、B 為互斥事件，試求 $P(B)$及$P(B|A)$。（10 分）

㈢令若 B^c 的餘事件，若 $P(B)=\frac{1}{2}$，試求 $P(B^c|A)$。（10 分）

【擬答】

㈠ A、B 為獨立事件 $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow \frac{7}{12}=\frac{1}{4}+P(B)-\frac{1}{4}\times P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}P(B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{4}{9}$$

2. $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(A)\times P(B)}{P(A)}=P(B)=\dfrac{4}{9}$

㈡ A、B 為互斥事件 $\Rightarrow P(A\cap B)=0$

1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow \frac{7}{12}=\frac{1}{4}+P(B)$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

2. $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=0$

㈢ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow \frac{7}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(B^c\mid A)=1-P(B\mid A)=1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=1-\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

三、有一組數據總共有 100 個數值，其平均數為 72，中位數為 64，眾數為 60，標準差為 6。現將這 100 個數值的每一個數值分別乘以-5再加上 10 後，得到一組新的數據，試求：

㈠原始數據中，至少約有幾個數值介於60至84之間？（9分）

㈡新數據的平均數、中位數、眾數、標準差及變異數。（15 分）

㈢新舊兩組數據間的共變異數。（6 分）

【擬答】

設原有數據為 x_i ，新的數據為 y_i

$$\Rightarrow y_i=-5x_i+10\text{，}i=1,2,3....,100$$

㈠由 chebyshev’s Inequality：

$$\mathrm{P}(|x-\mu|\le k\sigma)\ge 1-\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow P(60\le x\le 84)=P(|x-72|\le 12)=P(|x-72|\le 2\times 6)\ge 1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

$\therefore 100\times\frac{3}{4}=75$

至少有75個數值介於60至80之間

㈡$Y_i=-5x_i+10$，$i=1,2,3,\ldots\ldots,100$

1. $\overline{Y}=-5\overline{X}+10=-5\times72+10=-350$
2. $Md_y=-5Md_x+10=-5\times64+10=-310$
3. $\mathrm{Mo}_y=-5\mathrm{Mo}_x+10=-5\times60+10=-290$
4. $\sigma_y=|-5|\sigma_x=5\times6=30$
5. $\sigma_y{}^2=30^2=900$

㈢因為$Y_i=-5x_i+10, i=1,2,3,\ldots\ldots,100$

$\Rightarrow \rho_{xy}=-1$

$$\rho_{xy}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{Cov(x,y)}{6\times30}=-1$$

$\Rightarrow Cov(x,y)=-180$

四、想要了解水產養殖場的水塘裡究竟有多少條魚，一研究人員採用簡單隨機抽樣的方式，先撈取 500 條魚為樣本，做上記號後再放回水塘中。隔天再以簡單隨機抽樣的方式，撈取 400 條魚為樣本，其中 40 條有記號。試求此水塘中魚數量的一個 95%信賴區間。（15 分）

【擬答】

設P為有做記號的比例，即$\hat{p}=\frac{s}{n}$

且k=500,n=400,s=40, $\hat{N}=\frac{k}{\hat{p}}=\frac{nk}{s}$

$$\Rightarrow \hat{N}=\frac{k}{\hat{p}}=\frac{nk}{s}=\frac{400\times500}{40}=5000$$

且$\mathrm{Var}(\hat{N})=\frac{k^2n(n-s)}{s^3}=\frac{500^2\times400\times(400-40)}{40^3}=562500$

$\therefore$N信賴度95%信賴區間為

$$(\hat{N}-Z_{0.025}\sqrt{\frac{k^2n(n-s)}{s^3}},\hat{N}+Z_{0.025}\sqrt{\frac{k^2n(n-s)}{s^3}})$$

$\Rightarrow (5000-1.96\sqrt{562500},5000+1.96\sqrt{562500})$

$\Rightarrow (3530,6470)$

$\therefore$水塘中魚數量的一個95%信賴區間為$(3530,6470)$

五、過去的生產紀錄顯示，某生產線其瑕疵品的比率約為 10%。假定該生產線剛製造出一批共 900 件的物品，試問這批物品中，瑕疵品超過 100 件的機率為何？（15 分）

【擬答】

設 r.v.X 為瑕疵品的個數

$X \sim b(n=900, p=0.1)$

因為 $n=900$，且 $np = 900\times 0.1 = 90 \geq 5$

所以可以利用常態分配逼近二項分配

又 $\begin{cases} E(x) = np = 900\times 0.1 = 90 \\ var(x) = npq = 900\times 0.1\times 0.9 = 81 \end{cases}$

$$\Rightarrow P(X>100) = P(X\geq 101) = P\left(Z \geq \frac{101-90-\frac{1}{2}}{\sqrt{81}}\right)$$

$$= P(Z\geq 1.17) = 0.121$$