103年公務人員特種考試外交領事人員及外交行政人員、國際經濟商務人員、民航人員及原住民族考試試題

考 試 別：原住民族特考
等 別：三等考試
類 科 組：經建行政
科 目：統計學

一、一家員工人數超過千人的公司為員工設立了一個運動休閒時段，希望能夠藉以提升員工的工作滿意度。10 位隨機抽取的員工在運動休閒時段實施前後的工作滿意分數如下：

員工代號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
實施前	34	28	29	45	26	27	24	15	15	27
實施後	33	36	50	41	37	41	39	21	20	37

在顯著水準為 0.05 的情況下，是否有足夠證據顯示員工的工作滿意程度有所提升？請列出虛無假設、對立假設、決策法則以及你的結論。（15 分）

【擬答】

此題利用無母數符號檢定

實施前 X	34	28	29	45	26	27	24	15	15	27
實施後 Y	33	36	50	41	37	41	39	21	20	37
D=X-Y	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-

$$\begin{cases} H_0: \eta_1 \geq \eta_2 \\ H_1: \eta_1 < \eta_2 \end{cases}$$

$\alpha = 0.05$

$D(+) = 2,\quad D(-) = 8,\quad n = 10$

$S = \min\{D(+), D(-)\} = 2$

決策準則為當 $p-\text{value} < \alpha \Rightarrow \text{ReHo}$

$$\Rightarrow p-\text{value} = p(x \leq s) = p(x \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} C_x^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.0547$$

因為 $p-\text{value} = 0.0547 > 0.05 \Rightarrow \text{not ReHo}$

結論：沒有證據顯示員工的工作滿意程度有所提升

二、某大學想要了解該校學生對於某項議題支持度的隨機抽樣調查，依性別所分別得到的 95 分信賴區間如下：

男學生：（0.51, 0.67）

女學生：（0.48, 0.56）

㈠在顯著水準為 0.05 的情況下，是否有足夠證據顯示男、女學生對此議題的支持度有所不同？請列出虛無假設、對立假設、決策法則以及你的結論。（20 分）

㈡如果不分性別，試求該校學生針對此項議題支持度的一個 90 分信賴區間？我們可否據以推論該校全體學生的支持度高於 50 分？請說明。（10 分）

【擬答】

(一)男生支持度 P_1 信賴度 95%之信賴區間為

$$\left(\hat{P}_1 - Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{P}_1\left(1-\hat{P}_1\right)}{n_1}}, \hat{P}_1 + Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{P}_1\left(1-\hat{P}_1\right)}{n_1}}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathrm{P}}_1 = \frac{0.51+0.67}{2} = 0.59$$

$$e_1 = \frac{0.67-0.51}{2} = 1.96\sqrt{\frac{0.59\times 0.41}{n_1}} \Rightarrow n_1 = 145$$

女生支持度 P_2 信賴度95%之信賴區間為

$$\left(\hat{P}_2 - Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{P}_2\left(1-\hat{P}_2\right)}{n_2}}, \hat{P}_2 + Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{P}_2\left(1-\hat{P}_2\right)}{n_2}}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{P}_2 = \frac{0.48+0.56}{2} = 0.52$$

$$e_2 = \frac{0.56-0.48}{2} = 1.96\sqrt{\frac{0.52\times 0.48}{n_2}} \Rightarrow n_2 = 599$$

$$\begin{cases} H_0\text{: } \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2 \\ H_1\text{: } \mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}_2 \end{cases}$$

因為 $n_1 = 145 \geq 30$, $n_2 = 599 \geq 30$, 利用Z檢定

且 $\hat{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 n_2} = \frac{145\times 0.59 + 599\times 0.52}{145+599} = 0.53$

$\alpha = 0.05$　拒絕域 $\mathrm{C} = \{\mathrm{Z} \mid \mathrm{Z}>1.96 \text{或} \mathrm{Z}<-1.96\}$

檢定統計量 $Z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1} + \dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_2}}}$

$$= \frac{(0.59-0.52)-0}{\sqrt{\dfrac{0.53\times 0.47}{145} + \dfrac{0.53\times 0.47}{599}}} = 1.52 \notin \mathrm{C} \Rightarrow \text{not} \quad \text{Re Ho}$$

結論：沒有證據顯示男、女學生對此議題的支持度有所不同。

(二)設全校學生對此議題支持度為 p

則 p 信賴度90%之信賴區間為

$$\left(\hat{p} - Z_{0.05}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + Z_{0.05}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(0.53 - 1.645\sqrt{\frac{0.53\times 0.47}{744}}, 0.53 + 1.645\sqrt{\frac{0.53\times 0.47}{744}}\right)$$

$$\Rightarrow (0.50, 0.56)$$

因為此信賴間範圍得知在信賴度90%之條件下, $0.50 \leq p \leq 0.56$，所以有足夠證據推論該校全

體學生的支持度高於0.5

三、一輪胎製造商聲稱他的公司所生產出來的輪胎，其壽命可以藉由一個平均值為32,000 哩、標準差為 2,500 哩的常態模型來加以描述。

㈠試估計輪胎壽命的四分位距（5 分）

㈡在規劃一項銷售策略的過程中，一位區域經銷商提出給予輪胎壽命不足某一特定哩程數的客戶退款的構想，只是這位經銷商也不想冒太大的風險。如果平均每 25 名客戶中，該經銷商至多只願意提供一位退款的服務，試問他所提出的保證壽命應該為何？（5 分）

㈢如果你計畫購買 16 個這家公司的輪胎，你是否可以合理預期其平均壽命可以達到 34,000 哩？相反的，如果你只購買一個輪胎，你是否可以合理預期其平均壽命可以達到 34,000 哩？請說明兩者間的差異。（15 分）

㈣16 個輪胎的平均壽命介於 31,000 至 32,500 哩的可能性有多大？（5 分）

【擬答】

㈠設 $r.v.X$ 為輪胎壽命

$$X\sim N\left(\mu=32000,\sigma^2=2500^2\right)$$

$$Z_1=\frac{Q_1-32000}{2500}=-0.675\Rightarrow Q_1=30312.5$$

$$Z_2=\frac{Q_3-32000}{2500}=0.675\Rightarrow Q_3=33687.5$$

$$\text{四分位距}=Q_3-Q_1=33687.5-30312.5=3375$$

㈡設輪胎保證壽命為 K

$$\Rightarrow P(X<K)=0.04$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{K-32000}{2500}\right)=0.04$$

$$\text{由查表得}\frac{K-32000}{2500}=-1.75\Rightarrow K=27625$$

所以壽命保證為27625哩

㈢ *1.* $n=16\Rightarrow \overline{X}\sim N\left(\mu=32000,\sigma^2=\frac{2500^2}{16}\right)$

$$\Rightarrow P(\overline{X}\geq 34000)=P\left(Z\geq\frac{34000-32000}{\frac{2500}{\sqrt{16}}}\right)=P(Z\geq 3.2)=0.0007$$

預期16個輪胎平均壽命可以達到34000哩的機率只有0.0007

2. $n=1\Rightarrow X\sim N\left(M=32000,\sigma^2=2500^2\right)$

$$\Rightarrow P(X\geq 34000)=P\left(Z\geq\frac{34000-32000}{2500}\right)=P(Z\geq 0.8)=0.2119$$

若只購買一個輪胎，則預期平均壽命可以達到34000裡的機率有0.2119

所以當n愈大時預期平均壽命達到34000裡的機率愈小

　

㈣ $\overline{X} \sim N\left(\mu = 32000, \sigma^2 = \dfrac{2500^2}{16}\right)$

$$\Rightarrow P\left(31000 \le \overline{X} \le 32500\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{31000-32000}{\frac{2500}{\sqrt{16}}} \le \mathrm{Z} \le \frac{32500-32000}{\frac{2500}{\sqrt{16}}}\right) = \mathrm{P}(-1.6 \le \mathrm{Z} \ge 0.8) = 0.7333$$

四、只有在廣告公司能夠提出證明，顯示至少有 20 分以上的消費者曾經聽過廣告並且能夠辨識出產品時，製造商才願意與該廣告公司簽訂新的廣告合約。該廣告公司計畫隨機抽樣 400 人來進行電話調查。

㈠請列出虛無假設與對立假設；並請依據題意，分別說明型一錯誤與型二錯誤的意涵。（10 分）

㈡該廣告公司計畫使用 10 分的顯著水準來進行檢定，但製造商則希望將顯著水準降低為 5 分。原因何在呢？（3 分）

㈢這項檢定的檢定力的意涵為何？哪一個顯著水準的檢定力較高？為什麼？（8 分）

㈣最後兩家公司同意採用 5 分的顯著水準，但製造商提議電訪人數增加為 600，而非原先規劃的 400 人。請問此舉將提高或降低型二錯誤的犯錯可能？請解釋。（4 分）

【擬答】

㈠ $\begin{cases} H_0 : P \le 0.2 \\ H_1 : P > 0.2 \end{cases}$

其中P為曾經聽過廣告且能夠辨識出產品的比例

1. 型一錯誤為「H_0 為真且拒絕 H_0」，其機率為 α,即曾經聽過廣告且能辨識出產品的比例低於 0.2 但製造商卻與廣告公司簽訂新的廣告合約。

2. 型二錯誤為「H_0 為假且接受 H_0」，其機率為 β,即曾經聽過廣告且能辨識出產品的比例高於 0.2 但製造商卻不與廣告公司簽訂新的廣告合約

㈡顯著水準為容許犯型一錯誤的最大機率，所以 α 從 0.1 降到 0.05 對製造商比較有保障

㈢檢定力 $power = 1-\beta$，即「H_0 為假且拒絕 H_0」之機率，其意涵為曾經聽過廣告且能夠辨識出產品的比例高於 0.2 且製造商也與廣告公司簽訂新的廣告合約。

因為 α 愈大，則 β 愈小，即 1-β 愈大,所為 α =0.1 時檢定力較高。

㈣因為 n 愈大，則 β 愈小，所以增加電訪人數可以降低型二錯誤。