

- (D) 1. 某個按鈕，第一次按下可能亮紅燈或綠燈，兩者出現的機率都相等；前一次若出現紅燈，則再按下按鈕後出現紅燈的機率為 $\frac{1}{3}$ 、出現綠燈的機率為 $\frac{2}{3}$ ；前一次若出現綠燈，則再按下按鈕後出現紅燈的機率為 $\frac{3}{5}$ 、出現綠燈的機率為 $\frac{2}{5}$ 。試問按三次按鈕出現一次紅燈、兩次綠燈的機率為多少？
 (A) $\frac{41}{75}$ (B) $\frac{8}{15}$ (C) $\frac{7}{15}$ (D) $\frac{34}{75}$
- (C) 2. 設 $f(x) = \frac{1}{1+a \cdot 2^{bx}}$ 是一個定義在實數上的函數，其中 a 、 b 為兩個整數。若 $f(1) = \frac{4}{5}$ 在， $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 區間上的最小值為 $\frac{1}{2}$ ，且滿足 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ，則 $f(3)$ 之值為下列者？
 (A) $\frac{15}{16}$ (B) $\frac{32}{33}$ (C) $\frac{64}{65}$ (D) $\frac{128}{129}$
- (D) 3. 設 L 是過拋物線 $y^2 = 8(x+2)$ 焦點 F ，且其斜角為 60° 的直線。若直線 L 與拋物線交於 A 、 B 兩點，而 $\overline{AB}$ 的中垂線與 x 軸交於 P 點，則 $\overline{PF}$ ？
 (A) $8\sqrt{3}$ (B) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{16}{3}$
- (A) 4. 設 a 、 b 、 c 為實數，若 $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = k$ ，則所有可能的 k 之和為何？
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
- (C) 5. 設 a 、 b 、 c 為實數， $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 。已知當 $x \in [-1, 1]$ 時，函數 $f(x)$ 滿足 $|f(x)| \leq 1$ 。若 $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定義為 $g(x) = cx^2 + bx + a$ ，則在 $x \in [-1, 1]$ 時， $g(x)$ 之值是落在下列哪一個區間？
 (A) $[-2, 1]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $[-2, 2]$ (D) $[0, 3]$
- (B) 6. 已知 a 、 b 、 c 、 d 為正整數滿足 $\log_a b = \frac{3}{2}$ ， $\log_c d = \frac{5}{4}$ 。若 $a - c = 9$ ，則 $b + d =$ ？
 (A) 165 (B) 157 (C) 149 (D) 140
- (A) 7. 設 $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{R} : 2^{1-x} + a \leq 0 \text{ 且 } x^2 - 2(a+7)x + 5 \leq 0\}$ 。若 $A \subseteq B$ ，則實數 a 是在下列哪一個區間內？
 (A) $[-4, -1]$ (B) $[-\frac{2}{7}, -\frac{1}{2}]$ (C) $[-2, 0]$ (D) $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
- (B) 8. 設數列 $\{a_n\}$ 是將集合 $\{2^s + 2^t : 0 \leq s < t, s, t \text{ 為整數}\}$ 中的數由小排到大而成的數列，則 a_{103} ？
 (A) 20480 (B) 18432 (C) 17408 (D) 16896
- (A) 9. 設 $\Gamma_1: y = x^2 + 2x$ ， $\Gamma_2: y = -x^2 + a$ 為兩條拋物線，若這兩條拋物線恰有一條公切線，則 $a =$ ？
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
- (C) 10. 設 F_1 、 F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的兩個焦點，點 P 是橢圓上的一點滿足 $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PF_2}} = 2$ ，則 $\Delta PF_1 F_2$ 的面積為下列何者？
 (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3
- (B) 11. 已知 ΔABC 中 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ 。設 D 為 $\overline{AC}$ 上的一點， P 為 $\overline{BD}$ 上的一點使得 $\angle APC = 90^\circ$ 。若 $\angle ABP = \angle BCP$ ，則 $\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} =$ ？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- (B) 12. 設數列 $\{a_n\}$ 滿足對所有的正整數 $n \geq 3$ ， $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ 。若 $a_{100} = 2$ ， $a_{200} = 3$ ，則 a_{103} ？
 (A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3
- (D) 13. 若整數 x 、 y 、 z 滿足方程式 $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 3$ ，則 $|x| + |y| + |z|$ 的最大值為多少？
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

- (C) 14. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a, b, c 為整數。若 $f(0)$ 與 $f(-1)$ 都是奇數，則下列哪一個敘述一定正確？
 (A) $f(x)=0$ 有一個正根、兩個負根 (B) $f(x)=0$ 恰有一個整數根
 (C) $f(x)=0$ 不可能有三個整數根 (D) $f(x)=0$ 有兩個正根、一個負根
- (A) 15. 考慮所有可能的正整數 a ，其滿足 $2x + a = y$ 、 $a + y = x$ 、 $x + y = z$ ，試問 $x + a + y$ 的最大值為下列何者？
 (A) -10 (B) -5 (C) 5 (D) 10
- (B) 16. 若 a, b, c 是方程式 $x^3 + 6x^2 + 5x = 1$ 的三個根，則 $a^5 + b^5 + c^5 = ?$
 (A) 2883 (B) 3281 (C) 3779 (D) 4198
- (C) 17. 將分數 $\frac{19}{95}$ 分子的個位數與分母的十位數相同的數字「9」劃掉，分子留下 1，分母留下 5，形成一個新的分數 $\frac{1}{5}$ ，然而它與原來的分數等值，即 $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$ 。試問在分子與分母都是二位數的真分數中，總共有幾個分數滿足此性質？
 (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 4 個 (D) 6 個
- (A) 18. 設 $f(x) = \frac{x^2+a}{bx-c}$ ，其中 a 為整數， b, c 為非負整數。若 0 與 2 是恰存在的兩個實數使得 $f(x)=x$ ，且 $f(-2) < -\frac{1}{2}$ ，則 $f(x) = ?$
 (A) $\frac{x^2}{2(x-1)}, x \neq 1$ (B) $\frac{x^2}{3x-4}, x \neq \frac{4}{3}$ (C) $\frac{x^2}{2(5x-4)}, x \neq \frac{4}{5}$ (D) $\frac{x^2}{2(3x-5)}, x \neq \frac{5}{3}$
- (C) 19. 設 a 為正整數，若 $\sqrt{a-10} + \sqrt{a+17}$ 也是正整數，則所有可能的 a 之和為多少？
 (A) 178 (B) 187 (C) 198 (D) 209
- (B) 20. 極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1} = ?$
 (A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) -2
- (C) 21. 若正整數 $n \geq 2014$ 且除以 9 的餘數為 4，則 $8n + 9$ 除以 12 的餘數為何？
 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7
- (B) 22. 若正整數 n 滿足 $4n$ 除以 10 的餘數與 $6n$ 除以 12 的餘數都等於 6，則滿足條件的所有三位數正整數 n 之總和為何？
 (A) 44500 (B) 49860 (C) 54400 (D) 55400
- (D) 23. 拋物線 $y = x^2 + 2x + 2$ 的圖形與下列哪一個函數的圖形有交點？
 (A) $y = \log(x+1)$ (B) $y = -3^x$ (C) $y = 3x-1$ (D) $y = x^5 - 5$
- (A) 24. 從 $A = \{x^2 + x + 1, x^3 + 5x - 1, x^4 + 6x^2 + 2\}$ 與 $B = \{x^2 - 2, x^2 + x - 1, x^3 + 2x\}$ 兩組多項式中，各取出一多項式相乘得到它們的乘積，若多項式 $f(x)$ 表示所有這樣的乘積之和，則 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為何？
 (A) 51 (B) 15 (C) -51 (D) -15
- (B) 25. 設某等腰梯形有一內切圓，若梯形的一腰長為 a 而內切圓直徑為 b ，則等腰梯形與內切圓的面積比為何？
 (A) $2a : b$ (B) $4a : b$ (C) $8a : b$ (D) $16a : b$
- (B) 26. 在 $\triangle ABC$ 中，知道下列哪一個選項仍不一定能確定 ABC 的面積？
 (A) 三高的長度 (B) 三中線的長度 (C) 三邊的長度 (D) 兩邊長及一內角的度量
- (B) 27. 關於 $x = \frac{\sum_{k=0}^{10} C_k^{10} (\sqrt{3}+1)^k (\sqrt{3}-1)^{10-k}}{\sum_{j=0}^6 C_j^6 (\sqrt{6}+\sqrt{2})^j (\sqrt{6}-\sqrt{2})^{6-j}}$ 的敘述，下列何者是正確的？
 (A) x 是 12 的倍數 (B) x 是 9 的倍數
 (C) x 是有理數，但不是整數 (D) x 是無理數
- (D) 28. 在 $C_0^{41}, C_1^{41}, C_2^{41}, C_3^{41}, \dots, C_{41}^{41}$ 這 42 個組合數中，有多少個數是 205 的倍數？
 (A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 26
- (A) 29. 已知雙曲線 $x^2 - y^2 - 12x + 17 = 0$ 的圖形上恰有四個點的 (x, y) 坐標均為整數，則以此四點為頂點的凸四邊形之面積為何？

- (A) 360 (B) 348 (C) 320 (D) 280
- (C) 30. 關於 $x = \sqrt[4]{68 - 48\sqrt{2}}$ 的大小，下列何者是正確的？
 (A) $0.3 < x < 0.4$ (B) $0.4 < x < 0.5$ (C) $0.5 < x < 0.6$ (D) $0.6 < x < 0.7$
- (D) 31. 單位圓的所有外切直角三角形中，面積最小值為何？
 (A) $2 + 2\sqrt{3}$ (B) $3 + 2\sqrt{3}$ (C) $2 + 3\sqrt{2}$ (D) $3 + 2\sqrt{2}$
- (D) 32. 若函數 $f(x, y, z) = \sqrt{xy} + \sqrt{z}$ 在區域 $R = \{(x, y, z): x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z \leq 4\}$ 內的
 最大值發生在點 P，則點 P 在下列哪一個平面上？
 (A) $x+y+z = 1$ (B) $x-y+z = 8$ (C) $x-y-z = 1$ (D) $x-y+3z = 8$
- (C) 33. 關於函數 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5k-1)x^k}{3^k}$ ，下列哪一個數學式成立？
 (A) $f(4) = 64$ (B) $f(-4) = \frac{-32}{49}$ (C) $f(1) = \frac{13}{4}$ (D) $f(-1) = \frac{-5}{8}$
- (A) 34. 函數 $f(t) = \sqrt{\left(\frac{t^2}{8} - 7\right)^2 + (t - 12)^2} + \left|\frac{t^2}{8} - 1\right|$ 的最小值為何？
 (A) 10 (B) $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (C) $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (D) $\sqrt{188 - 48\sqrt{2}}$
- (C) 35. 坐標平面上將點 (a, b) 移到 $\left(\frac{b^2-a}{a+b+c}, \frac{a^2-b}{a+b+c}\right)$ 的過程，稱為「一次移動」。若依據同樣的規則，點 $(3, 5)$ 經過連續 20 次的移動後會到達點 (p, q) ，則 $p-q = ?$
 (A) 2 (B) 3 (C) -2 (D) -3
- (D) 36. 若 $\|k\|$ 表示正整數 k 的最大奇因數，則 $\sum_{k=1}^{200} \frac{\|k\|}{k} = ?$
 (A) $132\frac{25}{128}$ (B) $132\frac{49}{128}$ (C) $133\frac{25}{128}$ (D) $133\frac{49}{128}$
- (D) 37. 若 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 30^\circ$ ，則其內切圓半徑 r 與外接圓半徑 R 的比值 $\frac{r}{R}$ 為何？
 (A) $\frac{\sin A \sin B}{\sin A + \sin B + 2}$ (B) $\frac{\sin A \sin B}{\sin A + \sin B + 1}$ (C) $\frac{2 \sin A \sin B}{\sin A + \sin B + 2}$ (D) $\frac{2 \sin A \sin B}{2 \sin A + 2 \sin B + 1}$
- (B) 38. 從一長方體的八個頂點中，任取三點可以構成直角三角形的三頂點之機率為何？
 (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) 不能確定
- (C) 39. 滿足 $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 10$ 的整數數列 (a, b, c, d, e) 共有多少種？
 (A) 748 (B) 768 (C) 792 (D) 824
- (D) 40. 已知 $f(n) = (5 + \sqrt{26})^n + (5 - \sqrt{26})^n$ 都是整數 ($n=1, 2, 3, \dots$)，則下列哪一個數不是 10 的倍數？
 (A) $f(93)$ (B) $f(101)$ (C) $f(103)$ (D) $f(2014)$