

# 110 年公務人員特種考試關務人員考試試題

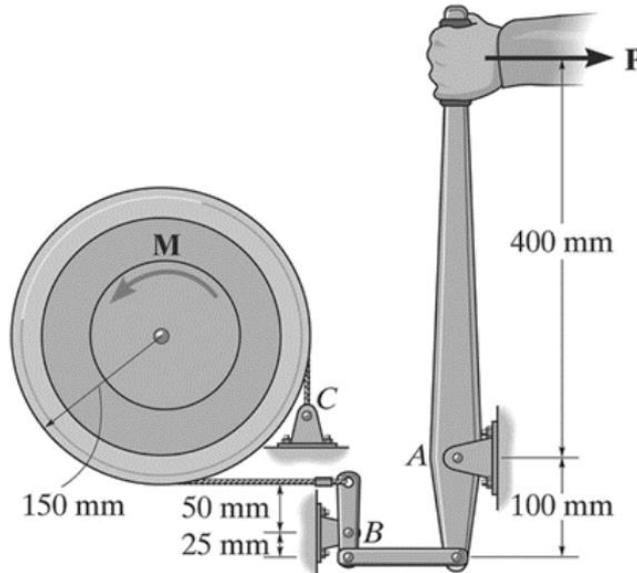
考試別：關務人員考試

等 別：三等考試

類 科：機械工程

科 目：工程力學(包括靜力學、動力學與材料力學)

- 一、如圖一所示的輪子承受一扭矩  $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。假設帶狀剎車 (Band Brake) 和輪子邊緣 (Rim) 之間的動摩擦係數 (Coefficient of Kinetic Friction) 為 0.3，試求要讓輪子停下所必須施加在槓桿 (Lever) 上最小的水平力  $P$ 。(25 分)



圖一

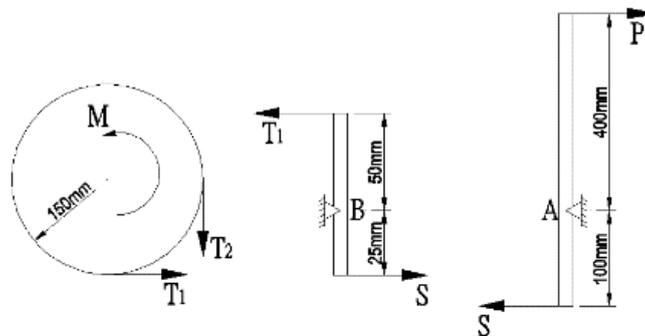
### 【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★★★ 普通

2. 《解題關鍵》：

- (1) 輪子受扭矩為逆時針方向，要讓輪子停下在 C 點的皮帶拉力會比較大。
- (2) 整個系統共有 A、B、C 三處的反力，需要三個平衡方程式解之。
- (3) 連結 A、B 槓桿的桿件為二力桿。

### 【擬答】



由槓桿 A 自由體

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow S \times 100 = P \times 400 \Rightarrow S = 4P$$

由槓桿 B 自由體

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow S \times 25 = T_1 \times 50 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}S = 2P$$

由輪子自由體，輪子受扭矩為逆時針方向，所以  $T_2 > T_1$

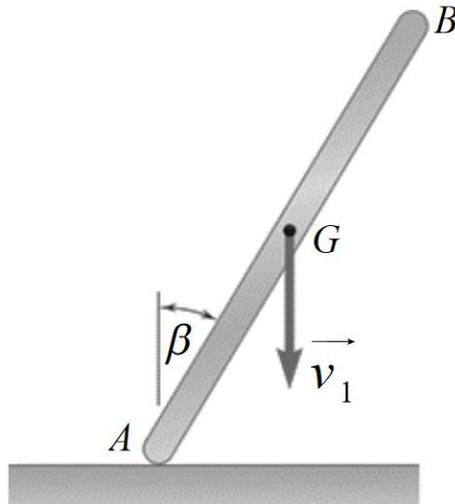
$$T_2 = T_1 \times e^{\mu\beta} = 2P \times e^{(0.3 \times \frac{3}{2}\pi)} = 8.22P$$

扭矩和為零得

$$50 \times 1000 + T_1 \times 150 = T_2 \times 150 \Rightarrow 8.22P = 2P + 333.33$$

$\Rightarrow P = 53.6 \text{ N}$ ...所需的最小水平力

二、如圖二所示為一長度為  $L$  之均質細長桿以一垂直速度  $\vec{v}_1$  且無角速度撞擊一光滑的水平面時，細長桿與鉛直方向的夾角為  $\beta$ 。若假設撞擊為塑性撞擊 (Perfectly Plastic Impact)，請推導細長桿在撞擊之後的瞬間之角速度。圖中之  $G$  點為細長桿之質心。(25 分)

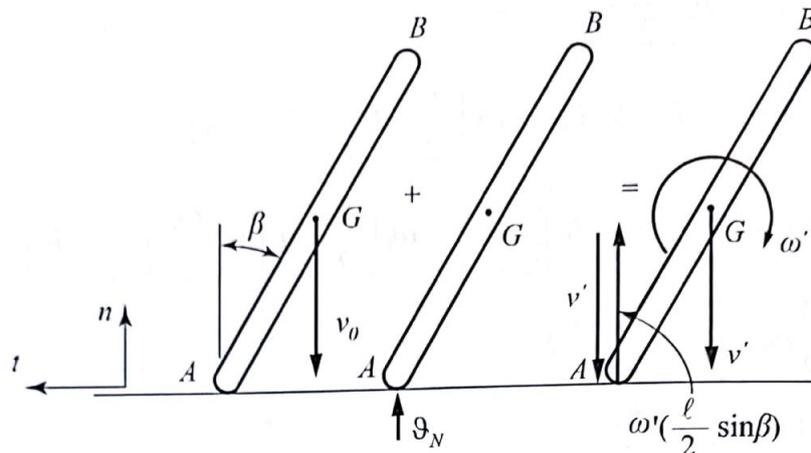


圖二

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★：普通
2. 《解題關鍵》：角動量守恆

【擬答】



假設碰撞後之角速度為  $\omega'$  ( $\curvearrowright$ )， $v'_G = v'$  ( $\downarrow$ )，故碰撞線方向速度為  $\left[ v' - \left( \frac{\ell}{2} \sin \beta \right) \omega' \right]$  ( $\downarrow$ )

對 AB 桿而言，碰撞前後，因地面光滑，故 x 方向無衝量，故  $(v'_G)_x = (v_G)_x = 0$

(1)  $(H_A)_1 = (H_A)_2$

$$\left( \curvearrowright + \right) (mv_0) \left( \frac{\ell}{2} \sin \beta \right) = \left( \frac{1}{12} ml^2 \right) (\omega') + (m)(v') \left( \frac{\ell}{2} \sin \beta \right)$$

$$\rightarrow 6 v_0 \sin \beta = \ell \omega' + 6 v' \sin \beta \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(2)  $e = 1$

$$\rightarrow \left( \downarrow + \right) 1 = \frac{0 - \left[ v' - \left( \frac{\ell}{2} \sin \beta \right) \omega' \right]}{v_0 - 0} \Rightarrow v_0 = -v' + \left( \frac{\ell}{2} \sin \beta \right) \omega' \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

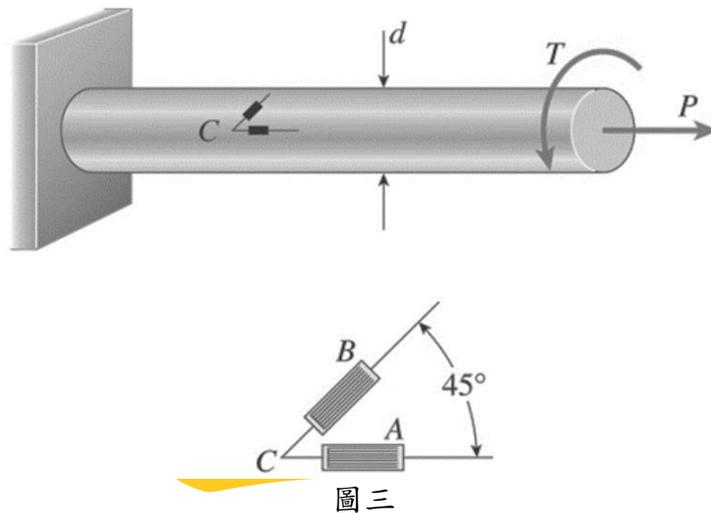
由①、②式得：

$$\rightarrow \omega = \frac{(12 \sin \beta) v_0}{(1 + 3 \sin^2 \beta) \ell} \left( \curvearrowright \right)$$

三、如圖三所示的一承受一軸向力  $P$  及一扭矩  $T$  的實心圓桿，圓桿直徑為  $d = 32 \text{ mm}$ 。安裝於圓桿表面的兩個應變計 A 及 B 的讀數分別為  $\epsilon_A = 140 \times 10^{-6}$  及  $\epsilon_B = -60 \times 10^{-6}$ 。圓桿的材料為楊氏模數 (Young's Modulus)  $E = 210 \text{ GPa}$  及波松比 (Poisson's Ratio)  $\nu = 0.29$  的鋼。試求：

(一) 軸向力  $P$  及扭矩  $T$ 。(15 分)

(二) 圓桿之最大剪應變 (Maximum Shear Strain) 及最大剪應力 (Maximum Shear Stress)。(10 分)



圖三

**【解題關鍵】**

1. 《考題難易》：★★★★ 普通

2. 《解題關鍵》：

- (1) 剪力彈性模數  $G$  需自行計算。
- (2)  $45^\circ$  應變計  $\epsilon_y = -\nu \epsilon_x$ ，依廣義虎克定律得  $\sigma_y = 0$ 。
- (3) 最大剪應變及最大剪應力需計算主應力的莫爾圓半徑  $R$  求得。

**【擬答】**

$$\text{剪力彈性模數 } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210}{2(1+0.29)} = 81.4 \text{ GPa}$$

斷面性質

公職王歷屆試題 (110 關務特考)

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(32)^2}{4} = 804.2 \text{ mm}^2$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(32)^4}{32} = 102944 \text{ mm}^4$$

依平面應變轉換(45°應變計)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A = 140 \mu$$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -0.29 \times 140 \mu = -40.6 \mu$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_B - \varepsilon_x - \varepsilon_y = 2 \times (-60 \mu) - 140 \mu + 40.6 \mu = -219.4 \mu$$

軸力  $P$  及扭矩  $T$  為未知，由應力反推求得

以廣義虎克定律求 C 點之應力值

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = 210 \times 10^3 \times 140 \mu = 29.4 \text{ MPa (拉應力)}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = 81.4 \times 10^3 \times (-219.4 \mu) = -17.86 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \Rightarrow 29.4 = \frac{P}{804.2} \Rightarrow P = 23643.5 \text{ N}$$

扭轉剪應力

$$\tau_{xy} = -\frac{16T}{\pi d^3} \Rightarrow -17.86 = -\frac{16T}{\pi(32)^3}$$

$$\Rightarrow T = 114911 \text{ N} \cdot \text{mm} = 114.9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

在 C 點之主應力

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{29.4 + 0}{2} = 14.7 \text{ MPa}$$

$$B = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{29.4 - 0}{2} = 14.7 \text{ MPa}$$

$$C = \tau_{xy} = -17.86 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{B^2 + C^2} = 23.13 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{23.13}{81.4 \times 10^3} = 284 \times 10^{-6}$$

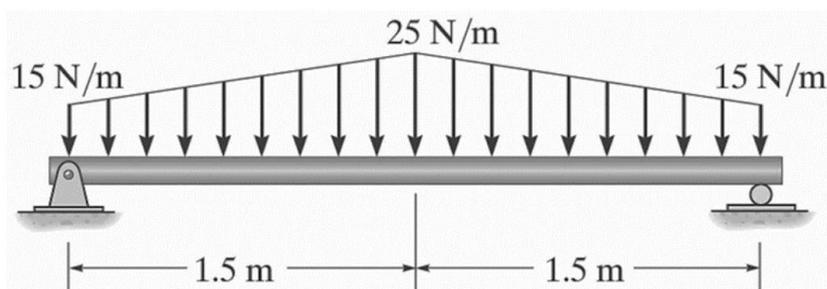
答：(一)軸向力  $P=23643.5 \text{ N}$  及扭矩  $T=114.9 \text{ N} \cdot \text{m}$

(二)最大剪應變  $\gamma_{max}=284 \times 10^{-6}$  及最大剪應力  $\tau_{max} = 23.13 \text{ MPa}$

四、如圖四所示之簡支梁的斷面為一實心圓柱。若圓柱可容許的彎曲應力為 167 MPa 且可容許的剪應力為 97 MPa。

(一)畫出梁之剪力圖及彎矩圖。(5分)

(二)試求梁可安全承載時的最小圓柱直徑。(20分)



圖四

【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★★★ 普通

2. 《解題關鍵》：

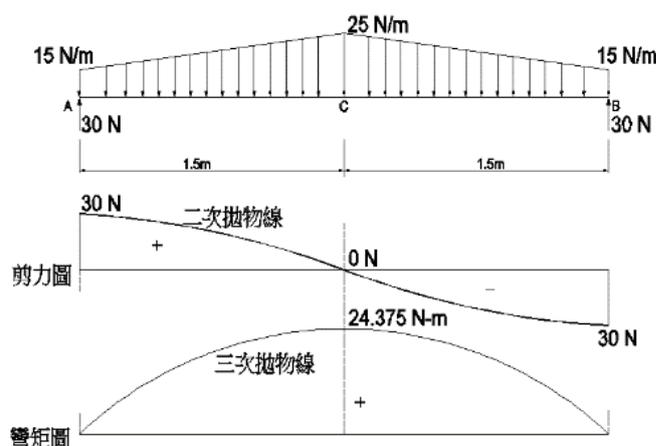
- (1) 樑為對稱結構，計算數值只需取一半的樑分析。
- (2) 載重為均斜分布，依口訣增凸凸繪製剪力圖及彎矩圖。
- (3) 最大剪應力發生在支承位置，最大彎曲應力發生樑中央。

【擬答】

(一) 樑為對稱結構，反力為外力總和的一半。

$$R = (15 + 25) \times 1.5 \times 0.5 = 30 \text{ N}$$

$$M_{max} = 30 \times 1.5 - 15 \times 1.5 \times 0.5 \times \frac{2}{3} \times 1.5 - 25 \times 1.5 \times 0.5 \times \frac{1}{3} \times 1.5 = 24.375 \text{ N} \cdot \text{m}$$



(二) 由剪力圖及彎矩圖可知

最大剪力  $V_{max} = 30 \text{ N}$

最大彎矩  $M_{max} = 24.375 \text{ N} \cdot \text{m}$

$$\tau_{max} = \frac{4 V_{max}}{3 A} = \frac{4}{3} \times \frac{30}{\frac{\pi}{4} d^2} \leq \tau_{allowable} = 97 \text{ MPa} \Rightarrow d \geq 0.72 \text{ mm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} = \frac{24.375 \times 10^3}{\frac{\pi}{32} d^3} \leq \sigma_{allowable} = 167 \text{ MPa} \Rightarrow d \geq 11.4 \text{ mm}$$

樑可安全承載時的最小圓柱直徑為 11.4 mm