

# 110 年公務人員特種考試關務人員考試試題

考試別：關務人員考試  
等 別：三等考試  
類 科：關稅統計  
科 目：抽樣方法

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

本試題可能使用之標準常態值如下：

$$z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.645$$

一、利用簡單隨機抽樣法 (simple random sampling)，自母體  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$  中抽出 3 個數為一組樣本，樣本中的最大值以  $X$  表示，最小值以  $Y$  表示。

(一)請列出  $X, Y$  的聯合機率分配 (joint probability distribution)  $f(x, y)$ 。(10 分)

(二)請求算機率  $f(X=10, Y \leq 7)$ 。(5 分)

(三)請求算期望值  $E(X | Y=6)$ 。(5 分)

(四)令  $Z = X + Y$ ，請計算期望值  $E(Z)$ 。(5 分)

### 【解題關鍵】

《考題難易》★★

《破題關鍵》本題屬統計學中的聯合機率分配的問題，屬統計學中等問題，但與抽樣方法並無太多相關，恰巧與 110 年度王瑋統計奪榜班第一次測驗的試題幾乎相同，可參考奪榜班教材。

### 【擬答】

(一)以簡單隨機抽樣法一次抽取 3 個數

$(X_1, X_2, X_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$X$	$Y$
(6, 7, 8)	1/10	8	6
(6, 7, 9)	1/10	9	6
(6, 7, 10)	1/10	10	6
(6, 8, 9)	1/10	9	6
(6, 8, 10)	1/10	10	6
(6, 9, 10)	1/10	10	6
(7, 8, 9)	1/10	9	7
(7, 8, 10)	1/10	10	7
(7, 9, 10)	1/10	10	7
(8, 9, 10)	1/10	10	8

所以  $X, Y$  的聯合機率分配為

公職王歷屆試題 (110 關務特考)

		X			
	$f(x, y)$	8	9	10	$f(y)$
Y	6	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
	7	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
	8	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
	$f(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

$$\begin{aligned} \text{(二)} \quad f(X=10, Y \leq 7) &= f(X=10, Y=7) + f(X=10, Y=6) \\ &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = 0.5 \end{aligned}$$

$$\text{(三)} \quad \text{先求條件機率函數 } f(X|Y=6) = \frac{f(X, Y=6)}{f(Y=6)}$$

X	8	9	10
$f(X Y=6)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

$$E(X|Y=6) = 8 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{2}{6} + 10 \times \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 0.1071$$

四由(一)得  $Z = X + Y$  之機密函數

$Z = X + Y$	14	15	16	17	18
$f(Z)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(Z) = 14 \times \frac{1}{10} + 15 \times \frac{2}{10} + \dots + 18 \times \frac{1}{10} = \frac{160}{10} = 16$$

二、公司在全國 250 個銷售據點販賣新產品 A，為了解 A 產品的市場接受度，行銷部門依全國地理位置分為甲、乙、丙、丁四個區域，其中甲區有 85 個銷售據點，乙區有 70 個銷售據點，丙區有 60 個銷售據點，丁區有 35 個銷售據點。現將每個區域視為一個層別，以分層隨機抽樣 (stratified random sampling) 法，自甲、乙、丙、丁各區中分別抽出 15, 12, 8, 5 個銷售據點，調查每個銷售據點 A 產品一週的銷售數量。由於各區幅員及交通狀況不同，調查費用也隨之不同，已知甲、乙、丙、丁各區，調查每個銷售據點的成本分為 6.25、4、9、9 (單位：萬元)。調查結果得 A 產品在每個銷售據點一週銷售數量的平均數及標準差資料如下：

區域	甲	乙	丙	丁
平均數	80.6	165	304	482
標準差	32.5	95.2	129.6	269.1

(一)估計 A 產品一週的總銷售量並計算其 95% 信賴區間。(10 分)

(二)現公司的管理高層欲估計 A 產品一週的總銷售量，及要求估計的 95% 誤差界限為 5000，則各區須調查多少個銷售據點，才能使調查總費用最低？同時計算需花費多少的調查費用？(14 分)

公職王歷屆試題 (110 關務特考)

(三)若調查總費用的預算為 350 萬元，請問各區銷售據點最佳的調查數量為何，方能達到(二)的要求？(6 分)

【解題關鍵】

《考題難易》★★

《破題關鍵》分層隨機抽樣樣本數問題是必考經典題，但此題的模式是近年常出現的題型。此題計算總和值之樣本數，過去僅 103 年關務有此考法，參考抽樣方法課本 3-86 頁；而採用談明配置來求總樣本數，過去亦不多見，抽樣方法課本 3-98 頁之 105 關務有完全相同試題；至於給定總成本求算樣本數，則在 105 年關務、106 年高考與 108 年高考皆有命題，可知此題除了是熱門試題外，亦是有挑戰的綜合型試題，需耐心計算與作答，才能拿到完整分數。

【擬答】

(一)將資料整理如下：

區域	甲	乙	丙	丁
$N_h$	85	70	60	35
$n_h$	15	12	8	5
$\bar{y}_h$	80.6	165	304	482
$s_h$	32.5	95.2	129.6	269.1
$c_h$	6.25	4	9	9

$$\hat{Y}_{st} = \sum_{h=1}^4 N_h \bar{y}_h = 85 \times 80.6 + 70 \times 165 + 60 \times 304 + 35 \times 482 = 46711$$

$$s_{\hat{Y}_{st}} = \sqrt{\sum N_h (N_h - n_h) \frac{s_h^2}{n_h}}$$

$$= \sqrt{85(85-15) \frac{32.5^2}{15} + \dots + 35(35-5) \frac{269.1^2}{5}}$$

$$= \sqrt{25242920.2} = 5024.2333$$

總銷售量  $Y$  之 95% 之信賴區間為

$$\Rightarrow 46711 \pm 1.96 \cdot 5024.2333 \Rightarrow (36863.5027, 5558.4973)$$

(二)分層抽樣母體總和值之樣本數  $n = \frac{\sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{s_h^2}{w_h}}{\frac{B^2}{Z^2} + \sum_{h=1}^L N_h s_h^2}$

採用談明配置，總樣本數

$$n = \frac{\sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 s_h^2}{\frac{N_h s_h}{\sqrt{c_h}} / \sum_{h=1}^L \frac{N_h s_h}{\sqrt{c_h}}}}{\frac{B^2}{Z^2} + \sum_{h=1}^L N_h s_h^2} = \frac{\left( \sum_{h=1}^L \sqrt{c_h} N_h s_h \right) \left( \sum_{h=1}^L \frac{N_h s_h}{\sqrt{c_h}} \right)}{\frac{B^2}{Z^2} + \sum_{h=1}^L N_h s_h^2}$$

其中  $\sum_{h=1}^L \sqrt{c_h} N_h s_h = \sqrt{6.25} \cdot 85 \cdot 32.5 + \dots + \sqrt{9} \cdot 35 \cdot 269.1 = 71817.75$

公職王歷屆試題 (110 關務特考)

$$\sum_{h=1}^L \frac{N_h s_h}{\sqrt{c_h}} = \frac{85 \times 32.5}{\sqrt{6.25}} + \frac{70 \times 95.2}{\sqrt{4}} + \frac{60 \times 129.6}{\sqrt{9}} + \frac{35 \times 269.1}{\sqrt{9}} = 10168.5$$

$$\sum_{h=1}^L N_h s_h^2 = 85 \cdot 32.5^2 + \dots + 35 \cdot 269.1^2 = 4266482$$

$$\text{故總樣本數 } n = \frac{71817.75 \times 10168.5}{\frac{5000^2}{1.96^2} + 4266482} = 67.78, n \text{ 取 } 68$$

$$\text{談明配置下, 甲區調查 } n_1 = \frac{1105}{10168.5} \times 68 = 7.39, n_1 \text{ 取 } 8$$

$$\text{乙區調查 } n_2 = \frac{3332}{10168.5} \times 68 = 22.28, n_2 \text{ 取 } 22$$

$$\text{丙區調查 } n_3 = \frac{2592}{10168.5} \times 68 = 17.33, n_3 \text{ 取 } 17$$

$$\text{丁區調查 } n_4 = \frac{3139.5}{10168.5} \times 68 = 20.99, n_4 \text{ 取 } 21$$

調查總費用  $C = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h$ , 即固定成本  $c_0$  加上各層成本  $c_h n_h$

總和在此固定成本  $c_0$  未知, 所以此時調查總成本

$$C = c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3 + c_4 n_4 = 6.25 \times 8 + 4 \times 22 + 9 \times 17 + 9 \times 21 = 480 \text{ 元}$$

(三) 考慮調查總費用  $C = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h$ , 即固定成本  $c_0$  加上各層成本  $c_h n_h$  總和, 但在此題並不考慮固定成

本, 即  $C = \sum_{h=1}^L c_h n_h$

將談明配置  $n_h = \frac{N_h s_h / \sqrt{c_h}}{\sum_{h=1}^L N_h s_h / \sqrt{c_h}} \times n$  代入上式

$$C = \sum_{h=1}^L c_h n_h = \sum_{h=1}^L c_h \frac{N_h s_h / \sqrt{c_h}}{\sum_{h=1}^L N_h s_h / \sqrt{c_h}} \times n$$

$$\sum_{h=1}^L \sqrt{c_h} N_h s_h = \sqrt{6.25} \cdot 85 \cdot 32.5 + \dots + \sqrt{9} \cdot 35 \cdot 269.1 = 71817.75$$

$$\sum_{h=1}^L \frac{N_h s_h}{\sqrt{c_h}} = \frac{85 \times 32.5}{\sqrt{6.25}} + \frac{70 \times 95.2}{\sqrt{4}} + \frac{60 \times 129.6}{\sqrt{9}} + \frac{35 \times 269.1}{\sqrt{9}} = 10168.5$$

$$\Rightarrow n = C \frac{\sum_{h=1}^L N_h s_h / \sqrt{c_h}}{\sum_{h=1}^L \sqrt{c_h} N_h s_h} = 350 \times \frac{10168.5}{71817.75} = 49.56, n \text{ 取 } 49$$

$$\text{談明配置下, 甲區調查 } n_1 = \frac{1105}{10168.5} \times 49 = 5.32, n_1 \text{ 取 } 5$$

$$\text{乙區調查 } n_2 = \frac{3332}{10168.5} \times 49 = 16.06, n_2 \text{ 取 } 16$$

$$\text{丙區調查 } n_3 = \frac{2592}{10168.5} \times 49 = 12.49, n_3 \text{ 取 } 13$$

公職王歷屆試題 (110 關務特考)

$$\text{丁區調查 } n_1 = \frac{3139.5}{10168.5} \times 49 = 15.13, n_4 \text{ 取 } 15$$

三、某貿易商進口了一批 5000 箱的機能飲料，每箱飲料依序編號且每一箱內含有 20 瓶飲料。現貿易商的主管想了解每瓶飲料的平均咖啡因含量，遂依每箱飲料編號順序，以每隔 500 箱抽出一箱方式，自此批飲料中抽出 10 箱，檢測每箱飲料的咖啡因含量，分別為  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ 。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)請問貿易商的主管採用何種抽樣方法？母體大小為何？

(二)參數為何？請寫出該參數的估計量。

【解題關鍵】

《考題難易》★

《破題關鍵》非常容易的系統隨機抽樣考題，沒有任何的陷阱與挑戰，可參考抽樣方法課本 P.7-15 完全相同試題範例。

【擬答】

(一)自 5000 箱以每隔 500 箱抽出一箱方式，此為系統隨機抽樣

(二)欲了解每瓶飲料的平均咖啡因含量，則估計的參數為母體平均數  $\mu$

$$\text{採用系統隨機抽樣，估計量為 } \bar{y}_{sy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10} \times (y_1 + y_2 + \dots + y_{10})$$

四、報名參加減肥中心春季班的班員共有 200 人，經減肥中心量測得平均體重為 72.5 公斤。每位班員均採用減肥中心提供之飲食餐 3 個月後，減肥中心主管想了解班員體重情況，於是從班員中隨機選了 10 位班員，並且測量其體重。得這 10 位班員減肥前及減肥後體重資料如下：

班員	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
減肥前體重	58	82	64	76	64	76	54	50	88	94
減肥後體重	52	70	64	64	58	70	52	46	46	82

(一)分別以比率估計量 (ratio estimator)、迴歸估計量 (regression estimator) 及差數估計量 (difference estimator)，估計班員減肥後的平均體重，並計算其變異數。(21 分)

(二)根據(一)的結果，您會建議採用那一個估計量？(4 分)

【解題關鍵】

《考題難易》★

《破題關鍵》分別採用比率估計與迴歸估計來比較估計量優劣，為地方特考常考題型，102 年地特、101 年地特、99 年地特與 106 年高考皆有相同題型。而比較迴歸估計與差數估計也是考題常客，如 103 年地特與 98 年高考，上述在抽樣方法課本中，皆有完全相同範例。而此題則是首見將比率估計、迴歸估計與差數估計放在同一題中，實際上的難度仍為課內基本題，應可輕鬆拿分。

【擬答】

(一)假設減肥前體重為 X，假設減肥後體重為 Y

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 706, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 51828,$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 634, \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 41380, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 46252$$

公職王歷屆試題 (110 關務特考)

$$1. \text{比率估計量 } \bar{y}_r = r \cdot \bar{X} = \frac{634}{706} \times 72.5 = 65.1062 \xrightarrow{\text{估計}} \bar{Y}$$

$$s_d^2 = \frac{\sum y_i^2 - 2r \cdot \sum x_i y_i + r^2 \sum x_i^2}{n-1}$$

$$= \frac{41380 - 2 \times \frac{634}{706} \times 46252 + \left(\frac{634}{706}\right)^2 \times 51828}{10-1}$$

$$= 11.7472$$

$$\text{var}(\bar{y}_r) = (1-f) \cdot \frac{s_d^2}{n} = \left(1 - \frac{10}{200}\right) \cdot \frac{11.7472}{10} = 1.1160$$

$$2. SS_x = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 51828 - \frac{706^2}{10} = 1984.4$$

$$SS_y = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 41380 - \frac{634^2}{10} = 1184.4$$

$$SS_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 1491.6$$

$$b_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_x} = \frac{1491.6}{1984.4} = 0.7517$$

$$\text{迴歸估計量 } \bar{y}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})$$

$$= \frac{634}{10} + 0.7517 \cdot \left(72.5 - \frac{706}{10}\right) = 64.8282 \xrightarrow{\text{估計}} \bar{Y}$$

$$MSE = \frac{SS_y - b_1^2 \cdot SS_x}{n-2}$$

$$= \frac{1184.4 - 0.7517^2 \cdot 1984.4}{10-2} = 7.9024$$

$$\text{var}(\bar{y}_{lr}) = (1-f) \cdot \frac{MSE}{n} = \left(1 - \frac{10}{200}\right) \cdot \frac{7.9024}{10} = 0.7507$$

$$3. \text{差數估計量 } \bar{y}_{rd} = \bar{X} + \bar{d} = 72.5 + \left(\frac{634}{10} - \frac{706}{10}\right) = 65.3 \xrightarrow{\text{估計}} \bar{Y}$$

$$s_d^2 = \frac{SS_y - 2 \cdot SS_{xy} + SS_x}{n-1} = \frac{1184.4 - 2 \times 1491.6 + 1984.4}{10-1} = 20.6222$$

$$\text{var}(\bar{y}_{rd}) = (1-f) \cdot \frac{s_d^2}{n} = \left(1 - \frac{10}{200}\right) \cdot \frac{20.6222}{10} = 1.9591$$

(二) 由  $\text{var}(\bar{y}_{lr}) < \text{var}(\bar{y}_r) < \text{var}(\bar{y}_{rd})$

所以應採用迴歸估計量。