

# 110 年公務人員特種考試關務人員考試試題

考試別：關務人員考試  
 等 別：三等考試  
 類 科：關稅統計  
 科 目：統計學

附表：Z 表，F(0.05)表

一、令  $X_1$  表示自北北基隨機調查  $n_1$  人，回答支持 A 案公投的人數； $p_1$  表示 A 案公投在北北基的母體支持率。令  $X_2$  表示自高屏區隨機調查  $n_2$  人，回答支持 A 案公投的人數； $p_2$  表示 A 案公投在高屏區的母體支持率。

(一)  $p_i, i=1, 2$  未知時，其最佳估計量( $\hat{P}_i$ )為何？(5 分)

(二) 試推導出  $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$  的期望值和變異數，並說明  $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$  的分配。(10 分)

(三) 若  $n_1=1200, X_1=500, n_2=900, X_2=300$ 。在顯著水準為 0.1 之下，試檢定兩區的 A 案支持率是否相等？(寫出虛無假設和對立假設，並說明檢定統計量之分配及檢定之結果。)(10 分)

1. 《考題難易》★
2. 《破題關鍵》母體比例的抽樣分配和檢定,基本題
3. 《命中特區》吳迪 (109.08), 統計學, 頁 8-40~8-43

**【擬答】**

(一)  $\hat{p}_i = \frac{X_i}{n_i}, i=1, 2$  為  $P_i$  最佳估計量

(二)  $X_i \sim b(n_i, p_i)$ ，且  $X_1, X_2$  獨立

$\Rightarrow E(X_i) = n_i p_i, Var(X_i) = n_i p_i q_i, i = 1, 2$

$$1. E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = E(\hat{p}_1) - E(\hat{p}_2) \\ = E\left(\frac{X_1}{n_1}\right) - E\left(\frac{X_2}{n_2}\right) = \frac{n_1 p_1}{n_1} - \frac{n_2 p_2}{n_2} = p_1 - p_2$$

$$2. Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = Var(\hat{p}_1) + Var(\hat{p}_2) \\ = Var\left(\frac{X_1}{n_1}\right) + Var\left(\frac{X_2}{n_2}\right) = \frac{n_1 p_1 q_1}{n_1^2} + \frac{n_2 p_2 q_2}{n_2^2} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

當  $n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty$  時， $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$  趨近常態分配

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

(三)  $\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$

$\because n_1 = 1200, n_2 = 900$  為大樣卡

利用 Z 檢定

$$\alpha = 0.1 \Rightarrow \text{拒絕域 } C = \{z \mid z > 1.645 \text{ 或 } z < -1.645\}$$

$$\text{合併比例 } \hat{p} = \frac{500+300}{1200+900} = \frac{8}{21}$$

$$\text{檢定統計量 } z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}} = \frac{\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{3}\right) - 0}{\sqrt{\frac{\frac{8}{21} \times \frac{13}{21}}{1200} + \frac{\frac{8}{21} \times \frac{13}{21}}{900}}} = 3.892 \in C \Rightarrow \text{ReHo}$$

結論：有證據顯示兩區的 A 案支持率不同。

公職王歷屆試題 (110 關務特考)

二、一種金屬重量(單位:g)假設為常態分配,平均值和變異數分別為 $(\mu, \sigma^2)$ ,即 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。  
 $\mu$ 值未知,但 $\sigma^2$ 值已知。

隨機抽取一樣本,樣本大小為 $n$ 。在顯著水準為0.05下,檢定 $H_0: \mu=10, H_1: \mu>10$ 。

(一)檢定統計量為何?其分配為何?(5分)

(二)假設樣本平均值 $\bar{x} = 12, \sigma=9$ ,欲使檢定結果拒絕 $H_0$ , $n$ 最少應該為多少?(5分)

(三)續題(二),在 $n=144$ 之下,請分別計算在 $\mu=12, 14$ 之型II誤差機率( $\beta$ ),並畫出檢定力曲線圖(power curve)(請標示清楚橫軸及縱軸,和 $\mu=10, 12, 14$ 的對應機率值)。(20分)

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》母體平均數的檢定及檢定力函數曲線圖
3. 《命中特區》吳迪(110.02),統計學,頁8-8~8-18

【擬答】

(一)母體為常態,且 $\sigma^2$ 已知,利用Z分配檢定

$$\text{檢定統計量 } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$(二) \begin{cases} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu > 10 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow C = \{z | z > 1.645\}$$

$$\text{檢定統計量 } Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{12 - 10}{\frac{9}{\sqrt{n}}} > 1.645$$

$$\Rightarrow n > 54.8$$

$\therefore n$ 至少要55

(三) $\alpha = p(\text{Re} | H_0 \text{ 為真}) = p(\bar{x} > k | \mu = 10)$

$$= p(z > \frac{k-10}{\frac{9}{\sqrt{144}}}) = 0.05$$

$$\text{由查表得 } \frac{k-10}{\frac{9}{\sqrt{144}}} = 1.645 \Rightarrow k = 11.23375$$

$$\Rightarrow C = \{\bar{X} | \bar{X} > 11.23375\}$$

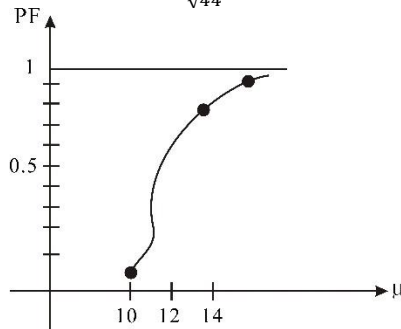
1.  $\mu = 12 \Rightarrow \beta = p(\text{AcHo} | H_0 \text{ 為假})$

$$= p(\bar{x} \leq 11.23375 | \mu = 12)$$

$$= p(z \leq \frac{11.23375 - 12}{\frac{9}{\sqrt{144}}}) = p(z \leq -1.02) = 0.1539 \Rightarrow 1 - \beta = 0.8461$$

2.  $\mu = 14 \Rightarrow \beta = p(\bar{x} \leq 11.23375 | \mu = 14)$

$$= p(z \leq \frac{11.23375 - 14}{\frac{9}{\sqrt{144}}}) = p(z \leq -3.69) = 0.0001 \Rightarrow 1 - \beta = 0.9999$$



公職王歷屆試題 (110 關務特考)

三、工程師研究電壓大小和溫度高低對手機壽命的影響。在指定的 2 種不同電壓 (100 V, 200 V) 和 2 種不同溫度 (25°C, 35°C) 的組合下分別量測手機壽命 (單位：千小時)；不同電壓和不同溫度組合下的實驗各反覆做 2 次，且所有實驗順序是隨機的。電壓大小和溫度高低組合下的手機壽命如表 1 所示。

表 1 手機壽命

溫度 (°C)	電壓 (V)		總和
	100	200	
25	12,16	10,12	50
35	8,10	6,8	32
總和	46	36	82

- (一)這是那種實驗設計 (即實驗設計的名稱為何) ? (5 分)
- (二)寫出變異數分析的固定效應模式 (fixed effects model) 及假設。(10 分)
- (三)列出變異數分析表並檢定電壓，溫度和交互作用是否是影響手機壽命的顯著因子，顯著水準  $\alpha=0.05$ 。(10 分)

1. 《考題難易》★
2. 《破題關鍵》二因子重複試驗變異數分析,基本題
3. 《命中特區》吳迪 (109.08), 統計學, 頁 9-43~9-51

【擬答】

(一)二因子重複試驗變異數分析

(二) $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), i=1,2,\dots,r \quad j=1,2,\dots,c \quad k=1,2,\dots,n$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^c \beta_j = 0, \sum_{i=1}^r (\alpha\beta)_{ij} = 0, \sum_{j=1}^c (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

(三)

溫度 \ 電壓	電壓		總和
	100	200	
25	12,16 (28)	10,12 (22)	50
35	8,10 (18)	6,8 (14)	32
總和	46	36	82

$$\sum \sum \sum X_{ijk}^2 = 12^2 + 16^2 + \dots + 8^2 = 908$$

$$r = 2, c = 2, n = 2, N = 8$$

$$SST = \sum \sum \sum X_{ijk}^2 - \frac{T_{...}^2}{N} = 908 - \frac{82^2}{8} = 67.5$$

$$SSR = \frac{1}{nc} \sum T_{i..}^2 - \frac{T_{...}^2}{N} = \frac{1}{2 \times 2} [50^2 + 32^2] - \frac{82^2}{8} = 40.5$$

$$SSC = \frac{1}{nr} \sum T_{.j.}^2 - \frac{T_{...}^2}{N} = \frac{1}{2 \times 2} [46^2 + 36^2] - \frac{82^2}{8} = 12.5$$

$$SSE = \sum \sum \sum X_{ijk}^2 - \frac{1}{n} \sum \sum T_{ij.}^2 = 908 - \frac{1}{2} [28^2 + 22^2 + 18^2 + 14^2] = 14$$

$$SSI = SST - SSR - SSC - SSE = 0.5$$

ANOVA 表

來源	SS	df	MS	F 值
溫度	40.5	1	40.5	F <sub>1</sub> =11.57 F <sub>2</sub> =3.57 F <sub>3</sub> =0.14
壓力	12.5	1	12.5	
交互作用	0.5	1	0.5	
誤差	14	4	3.5	
總變異	67.5	7		

$$1. \begin{cases} H_0: \text{不同溫度無顯著差異} \\ H_1: \text{不同溫度有顯著差異} \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05, C = \{F | F > F_{0.05}(1,4) = 7.7086\}$$

$$F_1 = 11.57 \in C \Rightarrow \text{Re } H_0$$

結論：有證據顯示不同溫度有顯著差異

$$2. \begin{cases} H_0: \text{不同壓力無顯著差異} \\ H_1: \text{不同壓力有顯著差異} \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05, C = \{F | F > F_{0.05}(1,4) = 7.7086\}$$

$$F_2 = 3.57 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示不同壓力有顯著差異

$$3. \begin{cases} H_0: \text{溫度與壓力無交互作用} \\ H_1: \text{溫度與壓力有交互作用} \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05, C = \{F | F > F_{0.05}(1,4) = 7.7086\}$$

$$F_3 = 0.14 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示溫度與壓力有交互作用

四、假設隨機變數  $X$  服從指數分配，已知其期望值( $\mu$ )為 0.5 且變異數( $\sigma^2$ )為 0.25。

令  $L_0 = \mu$ ， $L_1 = X$  的中位數， $L_2 = \mu + 3\sigma$ 。

(一)計算  $P(X < L_1)$  之機率值，並求  $L_1$  的值。(5 分)

(二)計算  $P(X < L_1, X > L_0)$  之機率值。(5 分)

(三)自母體中連續抽取 5 個數值，計算最多有 1 個數值落在  $L_1$  和  $L_0$  區間或  $L_0$  和  $L_2$  區間之機率。(10 分)

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》指數分配和二項分配,常考題型
3. 《命中特區》吳迪 (109.08), 統計學, 頁 5-52~5-55

【擬答】

(一) $X \sim \exp(\lambda)$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{1}{\lambda} = 0.5 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 2e^{-2x}, x > 0$$

$$p(x < L_1) = \int_0^{L_1} 2e^{-2x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -e^{-2x} \Big|_0^{L_1} = 1 - e^{-2L_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow L_1 = 0.3466$$

(二) $P(X < L_1, X > L_0) = 1 - P(L_1 \leq X \leq L_0)$

$$= 1 - \int_{0.3466}^{0.5} 2e^{-2x} dx = 1 - [-e^{-2x}] \Big|_{0.3466}^{0.5} = 0.8679$$

(三) $L_2 = \mu + 3\sigma = 0.5 + 3\sqrt{0.25} = 2$

$$P(L_1 < X < L_2) = \int_{0.3466}^2 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_{0.3466}^2 = 0.4817$$

設  $Y$  為落在  $L_1$  和  $L_0$  區間或  $L_0$  和  $L_2$  區間的個數

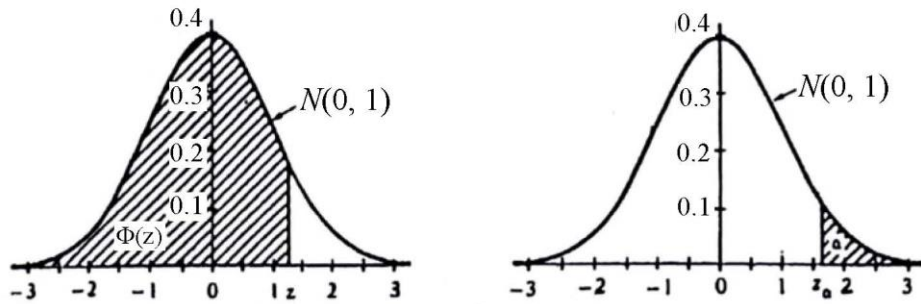
$\Rightarrow Y \sim b(n = 5, p = 0.4817)$

$$\Rightarrow f_{(y)} = C_y^5 (0.4817)^y (0.5183)^{5-y}, y = 0, 1, 2, \dots, 5$$

$$\Rightarrow P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$$

$$= C_0^5 (0.4817)^0 (0.5183)^5 + C_1^5 (0.4817)^1 (0.5183)^4 = 0.2112$$



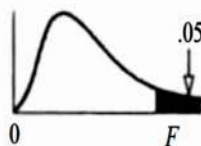


$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw$$

$$[\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)]$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
α	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001	
Z <sub>α</sub>	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	
Z <sub>α/2</sub>	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.240	2.576	2.807	3.291	

附表:  $F_{0.05}(v_1, v_2)$  值表



	Degrees of Freedom for the Numerator															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39