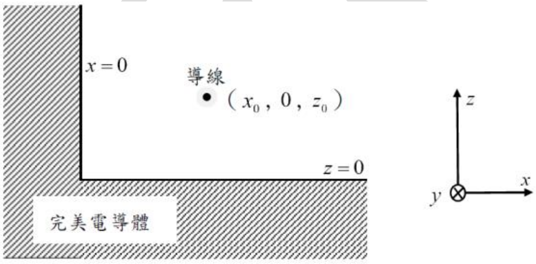
109 年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及 109 年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試
等　別：高員三級考試
類科別：電子工程
科　目：電磁學

一、㈠若真空中有一帶有均勻線電荷密度 ρ_l 之無窮長導線，求解此導線所建立之電場。（10 分）

㈡如圖一所示，$x<0$ 及 $z<0$ 之區域為完美電導體且表面之電位為零，若題㈠之線電荷以平行 y 軸之方式通過座標點（$x_0,0,z_0$）求解導線外（$x>0$ 及 $z>0$）之電場。（15 分）



圖一

【擬答】

㈠ $\oint\!\!\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_0^L\int_0^{2\pi} Er\,d\phi\,dz=2\pi rLE$

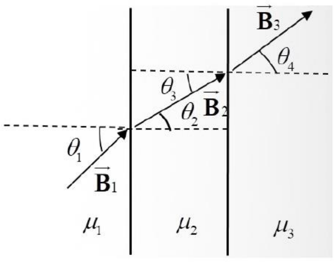
$$2\pi rLE=\frac{\rho_l L}{\varepsilon_0},\quad \vec{E}=\hat{a}_r\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

㈡總電場如下：

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3=\vec{E}_1=\frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\times\frac{(x+x_0)\hat{x}+(z-z_0)\hat{z}}{\left[(x+x_0)^2+(z-z_0)^2\right]}$$

$$-\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\times\frac{(x-x_0)\hat{x}+(z+z_0)\hat{z}}{\left[(x-x_0)^2+(z+z_0)^2\right]}+\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\times\frac{(x+x_0)\hat{x}+(z+z_0)\hat{z}}{\left[(x+x_0)^2+(z+z_0)^2\right]}$$

二、如圖二所示，$\vec{\mathbf{B}}_1$、$\vec{\mathbf{B}}_2$ 及 $\vec{\mathbf{B}}_3$ 為磁通量密度，若各層物質之相對介磁係數（relative permeability）為定值且各層間之平行介面上無表面電流存在，說明 θ_4 與 θ_1 之關係式與 μ_2 無關。（15 分）。



圖二

【擬答】

$B_1\cos\theta_1 = B_2\cos\theta_2$ −−−−−−−(1)

$\dfrac{B_1}{\mu_1}\sin\theta_1 = \dfrac{B_2}{\mu_2}\sin\theta_2$ −−−−−−−(2)

$B_2\cos\theta_2 = B_3\cos\theta_4$ −−−−−−−(3)

$\dfrac{B_2}{\mu_2}\sin\theta_2 = \dfrac{B_3}{\mu_3}\sin\theta_4$ −−−−−−−(4)

$\theta_2 = \theta_3$

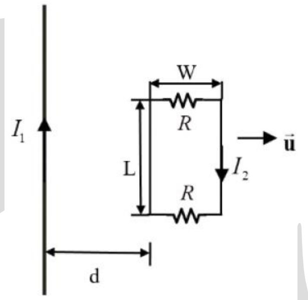
$\dfrac{(2)}{(1)} = \dfrac{\tan\theta_1}{\mu_1} = \dfrac{\tan\theta_2}{\mu_2}$ −−−−−−−(5)

$\dfrac{(4)}{(3)} = \dfrac{\tan\theta_2}{\mu_2} = \dfrac{\tan\theta_4}{\mu_3}$ −−−−−−−(6)

則

$(5)=(6) \Rightarrow \dfrac{\tan\theta_1}{\mu_1} = \dfrac{\tan\theta_4}{\mu_3} \Rightarrow$ 與 μ_2 無關

三、如圖三所示，一無窮長之直導線上有靜電流 $I_1 = I_0$ A，直導線旁有一長方形導線環，若長方形導線環上串接兩個電阻值皆為 R 之電阻且導線環以等速度 $\vec{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{a}}_y u_0$ 遠離直導線，忽略導線本身電阻，計算長方形導線環上之電流 I_2。（20 分）



圖三

【擬答】

於第 t 秒，方形線圈距離長直載流 I_1 為 $h+ut$，感應磁通為

$$\phi = \int B \times L dr = \int_{h+ut}^{h+w+ut} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \times L dr = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln\left(\frac{h+w+ut}{h+ut}\right)$$

$$E_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \times \left[\frac{u}{h+ut} - \frac{u}{h+w+ut}\right]$$

長方形導線環上之電流 $I_2 = \dfrac{E_{ind}}{2R} = \dfrac{\mu_0 I_1 L}{4\pi R} \times \left[\dfrac{u}{h+ut} - \dfrac{u}{h+w+ut}\right]$

四、一於真空中傳播之平面波電場相量（phasor）表示式為

$$\vec{\mathbf{E}}^i = \hat{\mathbf{a}}_y 120\pi e^{-j2\pi z} \quad \text{(V/m)}$$

假設 $z \geq 0$ 之區域存在一介電常數 $\varepsilon_r = 4$ 之無損耗（lossless）介電質（$\mu=\mu_0$），若此波於 $z=0$ 邊界入射：

㈠計算在 $z=0$ 邊界反射與透射係數。（8 分）

㈡寫出透射波（transmitted wave）之電場及磁場相量表示式。（10 分）

㈢計算透射波之複數波印亭向量（complex Poynting vector）。（7 分）

【擬答】

㈠反射係數 $\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{4}}{\sqrt{1}+\sqrt{4}}=-\frac{1}{3}$

透射係數 $\tau=1+\Gamma=\frac{2}{3}$

㈡ $E_{to}=120\times\frac{2}{3}=80$

透射電場相量表示式 $\vec{E}_{to}=\hat{y}80e^{-j4\pi z}\left(\frac{V}{m}\right)$

透射磁場相量表示式 $\vec{H}_t(z)=-\hat{x}\frac{80}{\frac{377}{\sqrt{4}}}e^{-j4\pi z}=-\hat{x}\frac{160}{377}e^{-j4\pi z}$

㈢複數波印亭向量 $\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}=\hat{z}\frac{1}{2}\times80\times\frac{160}{377}=\hat{z}16.976$

五、一長 5 公尺之無損耗之傳輸線（Z_0=50Ω），分隔傳輸線金屬之介電質為空氣（ε_r=1）。當操作頻率為 150 MHz 時，若線之一端接上 $Z_L=(20+j40)\Omega$ 之負載，計算從另一端看入之輸入阻抗。（15 分）

【擬答】

$\beta=\frac{\omega}{v_p}=\frac{2\pi\times150M}{3\times10^8}=\pi$， $Z_0=50\Omega$, $Z_L=20+j40\Omega$, $\ell=5m$

$Z_i=50\times\frac{(20+j40)+j50\cdot\tan(\pi\cdot5)}{50+j(20+j40)\cdot\tan(\pi\cdot5)}=20+j40\Omega$