109 年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及 109 年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試
等別：員級考試
類科組：電子工程、電力工程
科目：工程數學

一、利用 Laplace Transform 解下列微分方程式，其中方程式的等號右邊為一具有時間延遲的一個單位脈衝（unit impulse）輸入，求 $y(t)$。

$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\delta(t-1)$；$y(0)=0,\ \frac{dy}{dt}=0$（10 分）

【擬答】：

$$y''+3y'+2y=\delta(t-1)$$
$$\Rightarrow L\{y''+3y'+2y\}=L\{\delta(t-1)\}$$
$$\Rightarrow S^2Y(S)-Sy(0)-y'(0)+3[SY(S)-y(0)]+2Y(S)=e^{-S}$$
$$\Rightarrow S^2Y(S)+3SY(S)+2Y(S)=e^{-S}$$
$$\Rightarrow (S^2+3S+2)Y(S)=e^{-S}$$
$$\Rightarrow Y(S)=\frac{1}{(S+1)(S+2)}e^{-S}=\left(\frac{1}{S+1}-\frac{1}{S+2}\right)e^{-S}$$
$$\Rightarrow y(t)=L\left\{\left(\frac{1}{(S+1)}-\frac{1}{(S+2)}\right)e^{-S}\right\}$$
$$=\left[e^{-(t-1)}-e^{-2(t-1)}\right]u(t-1)$$

二、試求 $\oint_{c:|Z|=2}\frac{Z}{1+Z^2}$，其中 c 代表圍線積分的路徑為逆時鐘方向。（10 分）

【擬答】：

$$f(z)=\frac{z}{1+z^2}=\frac{z}{(z+i)(z-i)}$$

$z=i,-i$ 為非解析且在 $|Z|=2$ 內

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2}\frac{z}{1+z^2}dz=\oint_{|z|=2}\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-i}-\frac{z}{z+i}\right)dz$$
$$=\frac{1}{2i}\times 2\pi i(i+i)=2\pi i$$

三、$f(x)=\frac{1}{4}x^2$，若 $-\pi<x<\pi$ 且 $f(x+2\pi)=f(x)$ 求此函數之傅立葉級數(Fourier Series)。（15 分）

【擬答】：

此題為偶函數，週期 $2p=2\pi \Rightarrow p=\pi$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{p}x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

(1)

$$a_0=\frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{4}dx=\frac{\pi^2}{12}$$

(2)

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{4}\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{n^2}\cos nx=(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

四、若 $f(x)=x^7-2x^2+x-2I$，$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}$，I 為單位矩陣，求 $f(A)=?$。（15 分）

【擬答】：

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -3 & -4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2+3\lambda+2=0$$

$$\Rightarrow(\lambda+1)(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda=-1,-2$$

①

$$\lambda=-1\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2\\ -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

②

$$\lambda=-2\Rightarrow\begin{bmatrix}3 & 2\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}, p^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP=D\Rightarrow A=PDP^{-1}$$

$$\therefore f(A)=A^7-2A^2+A-2I$$

$$=P(D^7-2D^2+D-2I)P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -140\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}262 & 268\\ -402 & -408\end{bmatrix}$$

(A) 1. 設向量 $\mathbf{u}=(3,-2,-5)$，$\mathbf{v}=(1,4,-4)$，$\mathbf{w}=(0,3,2)$，則 $\mathbf{u}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$之值為何？其中運算元×表示為外積（cross product），$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 則表示為 **u** 和 **v** 的內積（inner product）。
(A) 49　(B) 56　(C) 84　(D) 92

(D) 2. 已知 u, v 為向量空間（vector space）V 中的兩個非零向量（nonzero vector），下列敘述何者不恆真？
(A)若 u, v 為正交（orthogonal），則 $\|u+v\|^2\le\|u\|^2+\|v\|^2$
(B) $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\|v\|$
(C) $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$
(D)若 u, v 的夾角為 θ，則 $\langle u,v\rangle\le\|u\|\|v\|\sin\theta$

(C) 3. 令 A, B 均為 n 階方陣，則下列何者恆成立？
(A) AB=BA　(B) $(AB)^T=A^TB^T$
(C) det(AB)=det(BA)　(D) det(A+B)=det (A)+det (B)

(D) 4. 下列方陣 A，何者存在矩陣 P 滿足 $P^TP=I$，且 P^TAP 為對角矩陣？
(A) $A=\begin{bmatrix}3&2&4\\-3&1&5\\0&-1&2\end{bmatrix}$　(B) $A=\begin{bmatrix}-1&1&-3\\1&0&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$　(C) $A=\begin{bmatrix}3&0&6\\0&1&0\\1&0&5\end{bmatrix}$　(D) $A=\begin{bmatrix}3&-2&1\\-2&1&0\\1&0&4\end{bmatrix}$

(D) 5. 下列何者非與矩陣 $\begin{bmatrix}4&-2\\1&1\end{bmatrix}$ 互為相似矩陣(similar matrices)?
(A) $\begin{bmatrix}4&1\\-2&1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}-3&10\\-3&8\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}-2&1\\3&5\end{bmatrix}$

(C) 6. 假設函數 $F(s)=1n\dfrac{s^2+1}{(s-1)^2}$ 的逆拉氏轉換 (inverse Laplace transdorm) 為 $f(t)=\dfrac{1}{t}(a\cos t+b\sin t)$，其中 a，b 是常數，求 a+b=?
(A)-2　(B)-1　(C)0　(D)2

(B) 7. 計算複數函數 $f(z)=(1+i)^{1-i}$ 為：
(A) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}\pm2n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-1n\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-1n\sqrt{2}\right)\right]$
(B) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\pm2n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-1n\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-1n\sqrt{2}\right)\right]$
(C) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}\pm2n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-1n\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-1\sqrt{2}\right)\right]$
(D) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\pm2n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-1n\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-1n\sqrt{2}\right)\right]$

(B) 8. 給定一複數函數為 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$，假設 C 為沿著逆時針方向繞員周 $|z-1|=1$ 之路徑，則線積分 $\int_c f(z)dz=??$
(A) 0　(B) πi　(C) $2\pi i$　(D) $3\pi i$

(C) 9. 求 $f(z)=\dfrac{2iz-\cos(z)}{z^3+z}$ 在 $z=-i$ 的殘餘值(residue)為：

(A)0　(B)$1+\frac{1}{2}\cos(i)$　(C)$-1+\frac{1}{2}\cos(i)$　(D)$-1-\frac{1}{2}\cos(i)$

(C) 10. 求解積分方程式 $y(t)=t+\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$ 為：

(A) $y(t)=\frac{1}{3}t^3+2t$　(B) $y(t)=\frac{1}{6}t^3$　(C) $y(t)=\frac{1}{6}t^3+t$　(D) $y(t)=\frac{1}{3}t^3+t$

(C) 11. 下列何者不是 $y(x)$ 的線性(linear)微分方程式?(其中 $y'=\frac{dy}{dx}$)

(A) $x^3y'+3x^2y=\frac{1}{x}$　(B) $x^2y'+2xy=\sinh 5x$

(C) $y'=1+y^2$　(D) $xy'=2y+x^3e^x$

(D) 12. 下列哪一個函數組合可構成微分方程式 $y^{(4)}-y=0$ 的解之基底(basis of solutions)?(其中 $y^{(4)}\equiv\frac{d^4y}{dx^4}$)

(A) $\cos x$ ， $\sin x$ ， x ， x^{-1}　(B) e^x ， e^{-x} ， x ， x^{-1}

(C) e^x ， e^{-x} ， $\cosh x$ ， $\sinh x$　(D) $\cos x$ ， $\sin x$ ， $\cosh x$ ， $\sinh x$

(A) 13. 請問微分方程式 $3y'=5x^3-\frac{3y}{x}$ ， $x>0$ 的解為何?

(A) $y=\left(\frac{1}{3}\right)x^4+\frac{c}{3x}$　(B) $y=\left(\frac{1}{3}\right)x^4-\frac{c}{3x}$

(C) $y=\left(\frac{1}{3}\right)x^3+\frac{c}{3x}$　(D) $y=\left(\frac{1}{3}\right)x^2-\frac{c}{3x}$

(C) 14. 假設微分方程式 $y''+xy'-2y=e^{5x}$ ；其中 $y(0)=2$ 且 $y'(0)=1$ ，若 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 為此微分方程式之級數解，求 a_4 的值為何?

(A) $\frac{11}{12}$　(B) $\frac{13}{12}$　(C) $\frac{25}{24}$　(D) $\frac{29}{24}$

(D) 15. 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換(Laplace transform)為 $L\{f(t)\}$，令 $L\{f(t)\}=\frac{-1}{(s-1)(S-2)}$ ，則 $f(t)$ 可能為何?

(A) e^t+e^{2t}　(B) $-e^t-e^{2t}$　(C) $-e^t+e^{2t}$　(D) e^t-e^{2t}

(A) 16. 求 $f(t)=|\sin(t)|$ 之拉氏轉換式為：

(A) $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$　(B) $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1+e^{-\pi s})}$

(C) $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$　(D) $\frac{1-e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$

(A) 17. 已知函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換(Fourier transform)存在，且其博立業轉換標記為 $F(\omega)=\Im\{f(t)\}$，下列何者恆真?

(A)若 $f(t)$ 在 $t=4$ 為連續，則 $f(4)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-4)dt$ ，其中 $\delta(t)$ 為單位脈衝訊號(unit impulse signal)

(B) $f(t-4)$ 的傅立葉轉換為 $e^{j4\omega}F(\omega)$

(C) $e^{j4t}f(t)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega+4)$

(D) $e^{3t}f(t)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega-3)$

　

(A) 18. 從 72 的所有正因數中，隨機選取一數，此數值大於 15 的機率為何?

(A)$\frac{1}{3}$　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{5}{12}$　(D)$\frac{7}{12}$

(A) 19. 假設兩個隨機變數 (X, Y)，其聯合機率分布 (joint probability distribution) 為 $f(x,y)=\frac{x+y}{30}$，其中 $x=0,1,2,3$；y=0, 1,2，試算出機率 $P(X>Y)$ 為何?

(A)$\frac{3}{5}$　(B)$\frac{17}{30}$　(C)$\frac{5}{6}$　(D)$\frac{7}{10}$

(A) 20. 隨機變數 X,Y 的聯合機率密度函數為 $f(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0<x\le y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，則 X 與 Y 之期望值分別為：

(A)8/15，4/5　(B)8/15，4/15　(C)4/5，8/15　(D)4/15，8/15