

考試別：鐵路人員考試

等別：員級考試

類科別：土木工程

科目：測量學概要

一、隨機誤差（或稱偶然誤差）以及系統誤差之特性各為何？針對前述兩類誤差，該如何進行測量資料處理？（25分）

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：隨機誤差（或稱偶然誤差）、系統誤差。

重點提要：誤差特性、資料處理方式。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第一章 測量概論 之 第3節 測量誤差、精度與數據處理。

【擬答】

(一)隨機誤差（或稱偶然誤差）以及系統誤差之特性

1. 隨機誤差（或稱偶然誤差）之特性

- (1) 出現誤差之情況有正有負，其正、負誤差出現之機率是相等。
- (2) 較小之誤差出現的機率較高，大誤差出現之機率較低。
- (3) 出現大誤差的次數較少，出現小誤差的次數較多。
- (4) 具常態分佈的特性，其曲線為常態分佈曲線。

2. 系統誤差之特性

- (1) 發生誤差大小相同，具有同方向性，亦即，同為正或是同為負。
- (2) 會隨觀測次數累積而增大，故亦稱為累積誤差。

(二)針對隨機誤差（或稱偶然誤差）以及系統誤差，應進行測量資料之處理方式

1. 針對隨機誤差（或稱偶然誤差），應進行測量資料之處理方式

- (1) 採用重複觀測的方式，以減少隨機誤差的影響：增加同一觀測量之觀測次數，計算最或是值及其標準差（中誤差或標準偏差）。例如：矩形的長邊 a 、短邊 b ，各觀測 n 次，計算得其最或是值及其標準差 $a \pm \sigma_a$ 、 $b \pm \sigma_b$ 。
- (2) 可以採用誤差傳播定律的方式，分析隨機誤差對新變量的影響。例如：採用誤差傳播定律，計算矩形面積的最或是值及其標準差 $A \pm \sigma_A$ ， $A = ab$ ， $\sigma_A = \pm \sqrt{(a \cdot \sigma_a)^2 + (b \cdot \sigma_b)^2}$ 。

2. 針對系統誤差，應進行測量資料之處理方式

(1) 於測量前：應小心校正儀器，以消除系統誤差。

例如：水準儀的定樁法(視準軸校正)，經緯儀的一次縱轉法、二次縱轉法等校正方法。

(2) 於測量中：採用適當的觀測方法，以消除系統誤差。例如：

- ① 經緯儀與全測站觀測：採正倒鏡觀測取平均，可消除水平角觀測之橫軸誤差、視準軸誤差、視準軸偏心誤差；以及縱角觀測之指標差。
- ② 水準儀觀測：採前視距離=後視距離，可消除視準軸誤差與兩差。
- ③ 經緯儀、全測站觀測：採用對向觀測，以消除兩差(地球曲率差與大氣折光差)。
- ④ GPS 觀測：採用同步觀測的方式(一次差、二次差、三次差)，以消除時鐘誤差。

採用雙頻觀測的方式，以消除電離層誤差。

(3) 於測量後：以數學模式計算閉合差，再改正觀測量。例如：

- ① 閉合導線、附合導線：角度與縱橫距之平差改正。

公職王歷屆試題 (109 鐵路特考)

- ② 閉合水準、附和水準、單線水準：後視、前視或高程差之平差改正。
- ③ 直接量距：量距改正。
- ④ 電子測距：長度之歸化改正。

二、某全測站其垂直角度盤屬於天頂距全圓周式，且垂直角觀測誤差為 $\pm 10''$ 。以該儀器進行某目標點之垂直角觀測，正鏡讀數為 $88^\circ 50' 30''$ ，倒鏡讀數為 $271^\circ 10' 50''$ ，則：

(一) 計算指標差？(10分)

(二) 改正後之垂直角(天頂距)及其先驗標準差各為多少？(15分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：天頂距、指標差。重點提要：誤差傳播定律。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019年版)

作者：賴明

章節出處：第四章 角度測量 之 第2節 角度觀測 之 三、縱角觀測與指標差計算

【擬答】

(一) 計算指標差

已知：正鏡讀數 $Z_1 = 88^\circ 50' 30''$ ，倒鏡讀數 $Z_2 = 271^\circ 10' 50''$

$$\text{指標差 } i = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2 - 360^\circ) = \frac{1}{2}(88^\circ 50' 30'' + 271^\circ 10' 50'' - 360^\circ) = 40''$$

(二) 計算改正後之垂直角(天頂距)及其先驗標準差

已知：垂直角觀測誤差為 $\pm 10''$ ，亦即， $\sigma_Z = \pm 10''$

假設：改正後之垂直角(天頂距) = Z ，其先驗標準差 = $\sigma_{Z_1} = \sigma_{Z_2}$

$$\text{垂直角(天頂距)} Z = \frac{1}{2}(Z_1 + 360^\circ - Z_2) = \frac{1}{2}(88^\circ 50' 30'' + 360^\circ - 271^\circ 10' 50'') = 88^\circ 49' 50''$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Z_1} = \frac{\partial}{\partial Z_1} \left[\frac{1}{2}(Z_1 + 360^\circ - Z_2) \right] = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Z_2} = \frac{\partial}{\partial Z_2} \left[\frac{1}{2}(Z_1 + 360^\circ - Z_2) \right] = -\frac{1}{2}, \quad \text{由誤差傳播定律}$$

$$\frac{\sigma_Z''}{\rho''} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial Z_1} \right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{Z_1}''}{\rho''} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Z_2} \right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{Z_2}''}{\rho''} \right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{Z_1}''}{\rho''} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{Z_2}''}{\rho''} \right)^2}$$

$$\text{等式左右同乘 } \rho'' \quad , \quad \text{得 } \sigma_Z'' = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 \times (\sigma_{Z_1})^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \times (\sigma_{Z_1})^2} = \pm \frac{\sigma_{Z_1}}{2} \sqrt{1+1} = \pm \frac{\sigma_{Z_1}}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma_{Z_1} = \pm \sqrt{2} \cdot \sigma_Z = \pm \sqrt{2} \times 10'' = \pm 10\sqrt{2}'' = \pm 14.1''$$

\therefore 改正後天頂距 = $88^\circ 49' 50''$ ，先驗標準差 = $\pm 14.1''$

三、針對地面雷射掃描儀(或稱地面光達)：

(一) 請說明其基本組成元件。(10分)

(二) 如何獲取所測量場景的點雲點位三維坐標？(15分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：地面雷射掃描儀、地面光達。重點提要：橫掃式與縱掃式。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019年版)

作者：賴明

章節出處：第八章 地籍測量 之 三、光達

【擬答】

(一) 地面雷射掃描儀之基本組成元件

地面雷射掃描儀，亦名地面光達 (Light Detection And Ranging, LiDAR)，其基本組成元件為：雷射掃描系統、全球定位系統 (GPS) 及慣性導航系統 (INS)。

(二) 獲取所測量場景的點雲點位三維坐標之方式

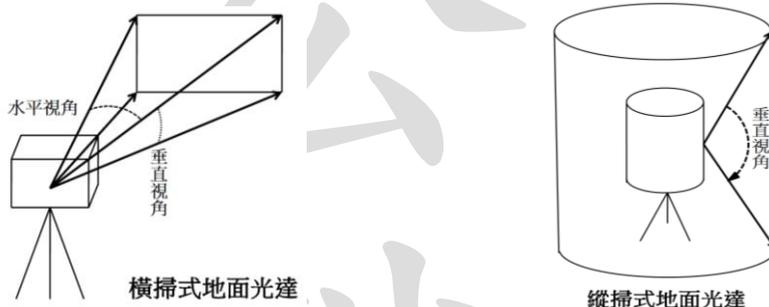
地面雷射掃描儀能快速獲取密集的點雲資料，記錄大量的空間點位三維資訊。

1. 掃描原理：為一個測角和測距的量測系統，由距離和角度觀測值，計算推求每點的儀器坐標系的坐標。地面光達對於被測物體的定位，是以光達為中心的坐標系來定義。再經由座標轉換的方式，將儀器坐標系的坐標，轉換至法定座標(TWD97 與 TWVD2001)

地面雷射掃描儀所定義的儀器坐標系，是以光達雷射發射中心為坐標原點，根據右手定則定義光達右方為 X 軸，掃描方向(景深)為 Y 軸，光達上方為 Z 軸，再根據地面光達對於被測物體所取得之量度資訊，來計算出被測物體的三維坐標。

2. 操作方法：透過雷射掃描儀向地面發出雷射光，對地物進行掃描與記錄三維坐標，並記錄飛行載具航線。

3. 地面雷射掃描儀的掃描方式：橫掃式與縱掃式



(1) 橫掃式

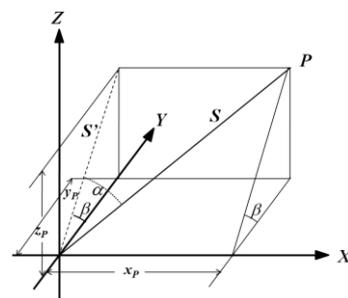
- ① 儀器進行掃描作業的方向是固定，儀器內部具有水平及縱向旋轉稜鏡，掃描範圍為一矩形的視角範圍，又稱為定向式。因為掃描範圍侷限於矩形視角，若要進行大範圍場景或環狀場景掃描時，則需要將儀器透過人為旋轉或移動儀器位置。
- ② 掃描方式是先固定垂直反射稜鏡，使掃描儀由左至右進行水平方向上的掃描。然後改變垂直反射稜鏡角度，亦由左至右進行水平掃描。
- ③ 橫掃式之地面光達觀測值包括：水平掃描角 α ，垂直掃描角 β ，地面光達到掃描點 P 的斜距 S ，由其幾何關係，可以定義點位 P 在地面掃描坐標系的坐標如下：

$$S' = S \times \cos \alpha$$

$$x_p = S \times \sin \alpha$$

$$y_p = S' \times \cos \beta = S \times \cos \alpha \times \cos \beta$$

$$z_p = S' \times \sin \beta = S \times \cos \alpha \times \sin \beta$$



(2) 縱掃式

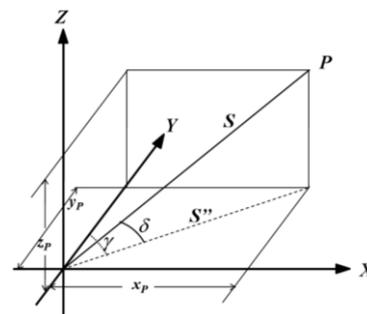
- ① 儀器內部只有一個縱角旋轉稜鏡，通常其水平視角範圍為 360 度，垂直視角範圍為 $80^\circ \sim 180^\circ$ 度，又稱為本體旋轉式，如圖。擺設一站所能掃描的範圍較大，常用於場景四周都有需觀測的地物，可減少掃描站擺站次數，也減少點雲拼接作業。
- ② 縱掃式掃描則依 δ 角及 γ 角來計算坐標。 δ 角及 γ 角分別為雷射光束，與水平面及起始掃描方向之垂直面的夾角，經由 δ 角及 γ 角與距離量 S 來計算 P 點坐標：

$$S'' = S \times \cos \delta$$

$$x_p = S'' \times \sin \gamma = S \times \cos \delta \times \sin \gamma$$

$$y_p = S'' \times \cos \gamma = S \times \cos \delta \times \cos \gamma$$

$$z_p = S \times \sin \delta$$



公職王歷屆試題 (109 鐵路特考)

四、針對衛星定位系統：

(一)說明其定位原理。(10分)

(二)從作業方式及定位品質上比較單點定位及相對定位之差異。(15分)

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★★

2.《破題關鍵》關鍵字：單點定位、相對定位。

重點提要：作業方式、定位品質、觀測量、精度因子(DOP)。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019年版)

作者：賴明

章節出處：第九章 衛星定位測量 之 六、GPS 定位原理 與 七、GPS 測量方法

【擬答】

(一)衛星定位系統之定位原理

衛星定位系統之定位方法，包含：單點定位、相對定位，其定位原理分述如下：

1. 單點定位

單點定位（絕對定位、導航定位）的基礎，為空間距離的後方交會，為求取測站的空間坐標。為求解三維坐標 (X, Y, Z) ，只需三個獨立的距離觀測量，此時測站位於以三個衛星為球心，相對距離為半徑的三個球面交點。但由於地面接收儀所採用的石英鐘之時間，以及衛星的鈾原子鐘之時間，皆與 GPS 時，存有一個時錶誤差 C_B 。因此，將時錶誤差作為一個變數，必須同時加以求解，因此必須同時接收最少四顆衛星才能進行定位。

以空間距離後方交會原理，計算地面點三維坐標 (U_X, U_Y, U_Z) 之觀測方程式如下：

$$(X_1 - U_X)^2 + (Y_1 - U_Y)^2 + (Z_1 - U_Z)^2 = (D_1 - C_B)^2$$

$$(X_2 - U_X)^2 + (Y_2 - U_Y)^2 + (Z_2 - U_Z)^2 = (D_2 - C_B)^2$$

$$(X_3 - U_X)^2 + (Y_3 - U_Y)^2 + (Z_3 - U_Z)^2 = (D_3 - C_B)^2$$

$$(X_4 - U_X)^2 + (Y_4 - U_Y)^2 + (Z_4 - U_Z)^2 = (D_4 - C_B)^2$$

式中： (X_1, Y_1, Z_1) 、 (X_2, Y_2, Z_2) 、 (X_3, Y_3, Z_3) 、 (X_4, Y_4, Z_4) ：第 1,2,3,4 顆衛星的坐標值（已知）

D_1, D_2, D_3, D_4 ：測站與第 1,2,3,4 顆衛星的距離（觀測值）。 C_B ：時錶誤差。

2. 相對定位

相對定位為求解 A、B 兩測站之間，相對位置的一種定位方法，其目的是從已知坐標之參考點，推求出未知點的坐標。換句話說，相對定位的目標乃在於決定 A、B 兩點間之基線向量 $\Delta\bar{R}_{AB}$ 。假設在某一坐標系中，參考測站 A 的位置向量 \bar{R}_A 為已知，若可利用 GPS 衛星決定出，在相同坐標系中，A、B 兩點間的基線向量 $\Delta\bar{R}_{AB}$ ，而根據向量方程式： $\bar{R}_B = \bar{R}_A + \Delta\bar{R}_{AB}$ ，則可求得在相同坐標系中未知測站 B 的位置向量 \bar{R}_B 。

其中： $\bar{R}_A = \bar{R}^j - \bar{e}_A^j r_A^j$ ， $\bar{R}_B = \bar{R}^j - \bar{e}_B^j r_B^j$

$$\Delta\bar{R}_{AB} = \bar{R}_B - \bar{R}_A = \begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_{AB} \\ \Delta Y_{AB} \\ \Delta Z_{AB} \end{bmatrix} = \bar{e}_A^j r_A^j - \bar{e}_B^j r_B^j$$

式中： \bar{R}^j 為各衛星之位置向量(已知)， \bar{e}_A^j 、 \bar{e}_B^j 為各衛星之單位向量

r_A^j 為測站 A 至各衛星之距離， r_B^j 為測站 B 至各衛星之距離

j 為衛星編號，例如：1, 2, 3, 4, ……

因此，兩測站若採取同步觀測，則大部份誤差，對於 A、B 兩測站在進行基線向量計算時，或因誤差大小相同而對消；或因誤差相似，而絕大部份誤差已減小，使得殘留下來

公職王歷屆試題 (109 鐵路特考)

的誤差已大大減少。

(二)從作業方式及定位品質上比較單點定位及相對定位之差異
差異性分析如下：

	單點定位法	相對定位法
作業方式	<ol style="list-style-type: none"> 1. 在測站上，整置接收儀，持續接收四顆衛星訊號而得定位結果。 2. 觀測量為虛擬距離觀測量，使用 C/A 電碼或 P 電碼觀測量進行定位。 3. 得到測站相對於 GPS 坐標系的絕對坐標。 4. 定位速度較快。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 使用二部接收儀，一部設置於已知坐標的主站，另一部設置於待測坐標的待測站或移動站。 2. 如可求得待測站與主站所連接的基線向量，則待測點坐標可根據主站坐標計算而得。 3. 以載波相位為觀測量，雙測站同時觀測聯解而求得基線向量。
定位品質	<ol style="list-style-type: none"> 1. 定位精度為公尺等級。 2. 只能對於時錶誤差加以改正，無法消除其他的 GPS 誤差，例如：衛星軌道誤差、電離層誤差、對流層誤差等誤差，因而定位品質(精度)較差。 3. 如欲提升定位品質(精度)可由二方面著手： <ol style="list-style-type: none"> (1) 評估觀測量的精度：藉由精度因子(DOP)評估單點定位的精度。 (2) 分析衛星在空間的幾何分布，對精度因子的影響：任選四顆衛星即可計算幾何精度因子 GDOP，再選擇 GDOP 為最小的一組衛星進行觀測。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 定位精度為公分等級。 2. 二站同步進行觀測的情況下，衛星時鐘誤差、軌道誤差較為一致；如二站距離在 10 公里之內，則電離層誤差、對流層誤差較為相似。二站觀測量組合，可消除或減低上述誤差的影響，提高待測站或移動站的定位精度，因而定位品質較佳。 3. 如欲提升定位品質(精度)可將二點相對定位，擴大為多點同時定位或稱網形定位，再經網形平差計算，提高定位精度。