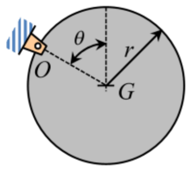
109 年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及 109 年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試
等　別：員級考試
類科別：機械工程、機檢工程
科　目：機械力學概要

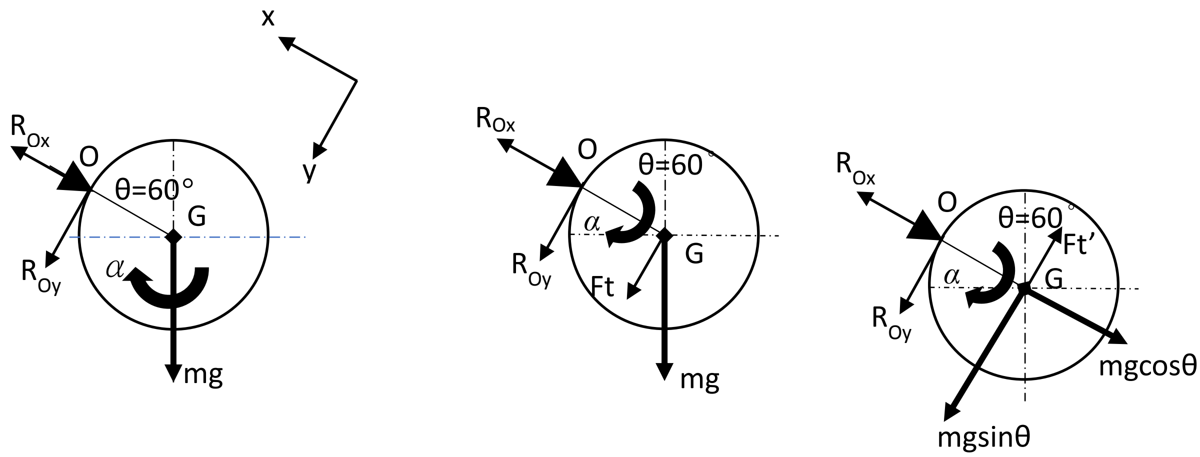
一、如圖一所示，一個半徑 r、質量 m 的圓形平板懸掛於鉸支承於 O 點，圓形平板靜止時，半徑 OG 與鉛垂線夾角 θ＝60°。請繪出自由體圖（free body diagram）及動力圖（kinetic diagram），求解圓形平板突然釋放瞬間的角加速度 α 及鉸支承 O 點的反作用力。（25 分）



圖一

《考題難易》：★★★。
《破題關鍵》：動力學 CH4 剛體動力學。

【擬答】



自由體圖（free body diagram）　　動力圖（kinetic diagram）

$$\sum M_O = I_O \times \alpha \ \Rightarrow mg \times \mathrm{r}\sin 60° = \frac{3}{2}mr^2 \times \alpha$$

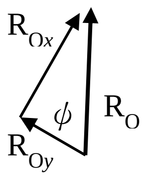
$$\therefore \alpha = \frac{\sqrt{3}g}{3r}(\circlearrowright)$$

$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow R_{ox} - mg\cos 60° \quad \therefore R_{ox} = \frac{1}{2}mg(\nwarrow)$$

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow R_{oy} + mg\sin 60° - mr\alpha = 0$$

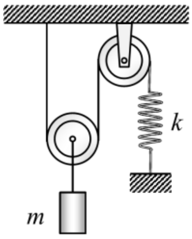
$$\therefore R_{ox} = mr\frac{\sqrt{3}g}{3r} - mg\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{6}mg(\nearrow)$$

$$R_o=\sqrt{(R_{ox})^2+\left(R_{oy}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}mg \quad ， \phi=\tan^{-1}\frac{R_{ox}}{R_{oy}}=\frac{\frac{1}{2}mg}{\frac{\sqrt{3}}{6}mg}=60^\circ$$



ANS：角加速度$\boldsymbol{\alpha=\frac{\sqrt{3}g}{3r}}$ (↻) **及鉸支承 O 點的反作用力**$\boldsymbol{R_o=\frac{\sqrt{3}}{3}mg}$ **，** $\boldsymbol{\phi=60^\circ}$

二、一個質量 m = 25 kg 的物體懸吊於一組滑輪及彈簧係數 k = 800 N/m 之線性彈簧，如圖二所示。已知物體靜止時，彈簧的初始伸長量為 50 mm。忽略滑輪與繩子之間的摩擦及彈簧質量，試求物體自靜止狀態向下移動 100 mm 的瞬間速度。重力加速度 g = 9.81 m/S^2。（25 分）

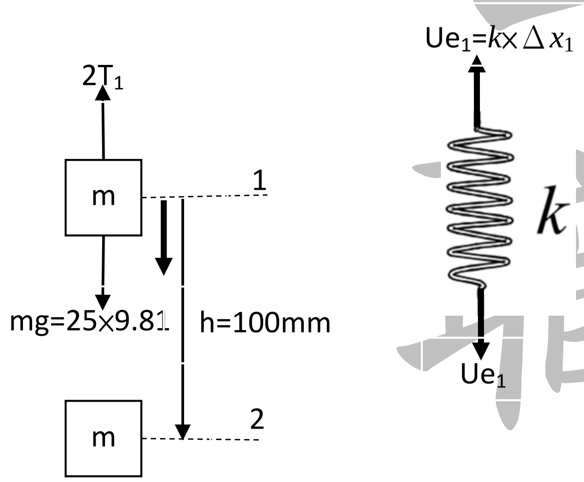


圖二

《考題難易》：★★。
《破題關鍵》：動力學 CH2 質點動力學-力學能守恆。

【擬答】

1. 物體靜止時與此時彈簧受力的自由體圖



2. 設物體向下移動 100 mm 時為零力面。根據力學能守恆，可以得知物體向下移動 100 mm 時，定滑輪側會移動 x_2＝200mm：

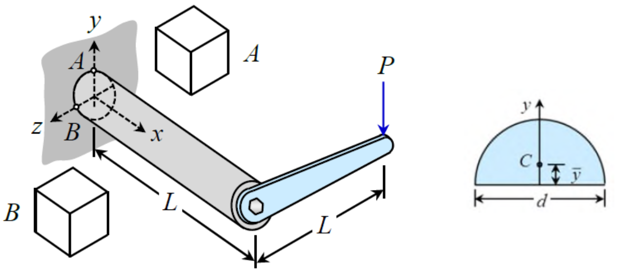
$$Ug_1 + Ue_1 = Ek_2 + Ue_2 \Rightarrow mgh + \frac{1}{2}k\Delta x_1^2 = \frac{1}{2}mV_2^2 + \frac{1}{2}k\Delta x_2^2$$

$$25 \times 9.81 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 800 \times (0.05)^2 = \frac{1}{2} \times 25 \times V_2^2 + \frac{1}{2} \times 800 \times (0.2)^2$$

$$\therefore V_2 = 0.873(m/sec)$$

ANS：物體自靜止狀態向下移動 100 mm 的瞬間速度$\boldsymbol{V_2 = 0.873(m/sec)}$。

三、如圖三所示，一根直徑 d、長度為 L 的實心圓柱末端固支承於剛性牆面， 另一端則以一個長度為 L 之水平六角扳手施予鉛垂作用力 P。半圓形面積為$\pi d^2/8$，形心位置$\bar{y}=2d/(3\pi)$。試求固定端斷面 A、B 兩點處各個不為零的應力分量，並繪於對應的立方體元素。(25 分)



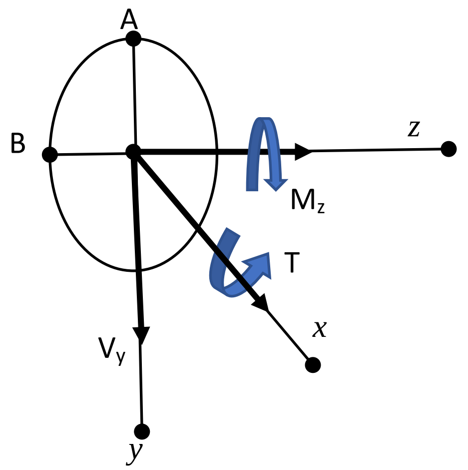
圖三

《考題難易》：★★★。
《破題關鍵》：材料力學 CH5 組合應力。

【擬答】

1. B 兩點所在斷面之載重包括剪力 V_y、彎矩 M_Z 及扭矩 T，如下圖所示，其中：

$V_y=P$，$M_z=PL$，$T=PL$



2. A 點的應力狀態：

由上圖可以看出 A 點之正交應力 σ_x 由彎矩 M_z 所產生，剪應力 τ_{xy} 是由扭矩 T 所產生，而剪力 V，在 A 點所產生之剪應力為零

$$\sigma_x=\frac{32M_z}{\pi d^3}，\tau_{xy}=\frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{32M_z}{\pi d^3}\pm\sqrt{\left(\frac{16M_z}{\pi d^3}\right)^2+\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

$$\sigma_{1,2}=\frac{32PL}{\pi d^3}\pm\sqrt{\left(\frac{16PL}{\pi d^3}\right)^2+\left(\frac{16PL}{\pi d^3}\right)^2}=\frac{32PL}{\pi d^3}\pm\frac{16\sqrt{2}PL}{\pi d^3}=\frac{16\left(2-\sqrt{2}\right)PL}{\pi d^3}$$

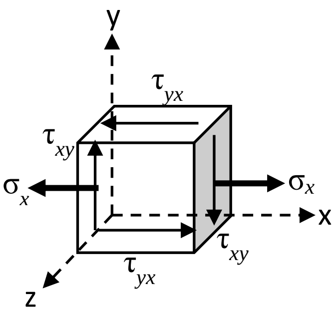
$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\sqrt{\left(\frac{16M_z}{\pi d^3}\right)^2+\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{16PL}{\pi d^3}\right)^2+\left(\frac{16PL}{\pi d^3}\right)^2}=\frac{16\sqrt{2}PL}{\pi d^3}$$

3. B 點的應力狀態：

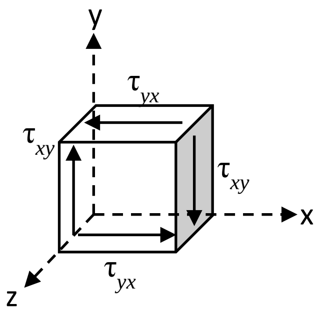
由上圖可以看出 B 點由彎矩 M_z 所產生之正交應力 σ_x 為零(因為 B 點在中立軸上)，剪應力 τ_{xy} 是由扭矩 T 與剪力 V_y，所產生，故得：

$$\tau_{xy} = -\frac{4V_y}{3A} + \frac{16T}{\pi d^3} = -\frac{16dV_y}{3\pi d^3} + \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16}{\pi d^3}\left(PL - \frac{dV_y}{3}\right)$$

4. A、B 兩點處對應的立方體元素

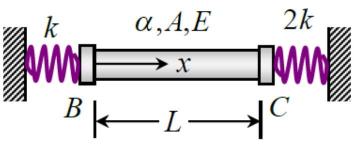


A 點處對應的立方體元素



B 點處對應的立方體元素

四、如圖四所示，一均匀斷面之彈性圓柱 BC 在室溫下，兩端法蘭（flange） 被彈簧係數為 k 及 2k 的兩根絕熱線性彈簧固支承於剛性牆面，初始軸力不等於零。圓柱的初始長度、斷面積、彈性常數、熱膨脹係數分別為 L、A、E、α。若圓柱受到均匀分布的溫度增量 ΔT，試求圓柱 BC 最終承受的軸向力（axial force）及軸向應變（axial strain）。(25 分)

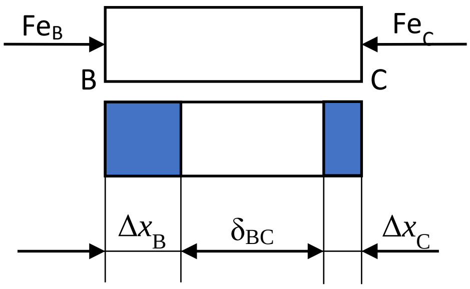


圖四

《考題難易》：★★★。
《破題關鍵》：材料力學 CH1 熱應力。

【擬答】

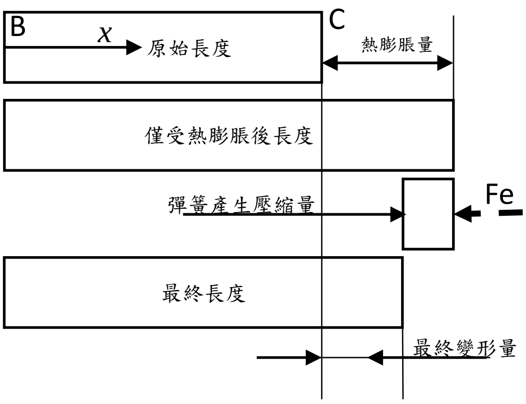
1. 彈性圓柱 BC 的熱變形量$\delta_T = L \times \alpha \times \Delta T$
2. B 點彈簧作用力$F_{eB} = k_B \times \Delta x_B = k\Delta x_B$，C 點彈簧作用力$F_{ec} = k_C \times \Delta x_C = 2k\Delta x_C$，B、C 兩側彈簧視為並聯使用，$\therefore F_{eB} = F_{eC} \Rightarrow k\Delta x_B = 2k\Delta x_C \Rightarrow 2\Delta x_B = \Delta x_C$



3. 最終變形量(δ_{BC})

$$\delta_{BC} = \frac{Fe_B \times L}{AE} = \frac{Fe_C \times L}{AE} = \frac{2k\Delta x_C \times L}{AE} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

4. 令 B 端為固定，此時圓柱 BC 的自由體圖，



5. 熱膨脹量(δ_T)＝最終變形量(δ_{BC})＋彈簧變形量(δ_e)

$$\delta_T = \delta_{BC} + \Delta x_B + \Delta x_c = \delta_{BC} + 3\Delta x_c \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)代入(2)

$$L \times \alpha \times \Delta T = \frac{2k\Delta x_C \times L}{AE} + 3\Delta x_c = \frac{\Delta x_c \times (2kL + 3AE)}{AE}$$

$$\therefore \Delta x_c = \frac{\alpha AEL\Delta T}{(2kL + 3AE)}$$

6. 圓柱 BC 最終承受的軸向力（axial force）F*x*：

$$F_x = Fe_B = Fe_C = 2k \times \Delta x_c = \frac{2\alpha AEkL\Delta T}{(2kL + 3AE)}$$

7. 圓柱 BC 最終承受的軸應變（axial strain）ε_x：

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x_B + \Delta x_C - \delta_{BC}}{L} = \frac{3\Delta x_C - \delta_{BC}}{L} = \left[\left(3 - \frac{2kL}{AE}\right) \times \frac{\alpha AEL\Delta T}{(2kL + 3AE)}\right] \times \frac{1}{L}$$

$$= \left[\left(\frac{3AE}{AE} - \frac{2kL}{AE}\right) \times \frac{\alpha AEL\Delta T}{(2kL + 3AE)}\right] \times \frac{1}{L} == \left[\left(\frac{3AE - 2kL}{AE}\right) \times \frac{\alpha AEL\Delta T}{(2kL + 3AE)}\right] \times \frac{1}{L}$$

$$= \frac{(3AE - 2kL) \times \alpha\Delta T}{2kL + 3AE}$$

ANS：(1)圓柱 BC 最終承受的軸向力$\boldsymbol{\frac{2\alpha AEkL\Delta T}{(2kL+3AE)}}$

(2)圓柱 BC 最終承受的軸應變$\boldsymbol{\frac{(3AE-2kL)\times\alpha\Delta T}{2kL+3AE}}$